АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

3554—3926

*

№ 6 1954
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА

В. В. Алпатов, А. П. Лебедев, С. М. Никольский, К. Ф. Огородников,
Д. Ю. Панов (председатель редколлегии), Б. Н. Рутовский,
Л. И. Седов, Э. В. Шпольский

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Биографии 3
Основания математики и математическая логика 3
Теория чисел 6
Алгебра 14
Многочлены и линейная алгебра 14
Группы 16
Поля, кольца и структуры 18
Топология 20
Теория функций действительного переменного 24
Теория множеств 26
Приближение функций полиномами и их обобщениями 28
Теория функций комплексного переменного 31
Дифференциальные уравнения 39
Обыкновенные дифференциальные уравнения 39
Уравнения в частных производных . . . 42
Приложения к физике, технике и естественным наукам 46
Интегральные уравнения 53
Вариационное исчисление 55
Анализ (другие вопросы) 56
Числовые ряды 57
Специальные функции 57
Интегральные преобразования и операционное исчисление 58
Функциональный анализ 59
Теория вероятностей 61
Математическая статистика 63
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов в технике . . . 65
Геометрия 66
Приложения геометрии 68
Проективная и начертательная геометрия 69
Алгебраическая геометрия 69
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 70
Геометрия n-мерного пространства. Теория относительности 72
Геометрия выпуклых многообразий . . . 75
Численные и графические методы 76
Таблицы 82
Алгебра электрических цепей 83
Вычислительные машины и математические приборы 84
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике 95
Авторский указатель . . . . . I—IV

Адрес редакции: Москва, Д-219, Балтийский пос., д. 42 Б.

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, В. М. Курочкин, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, С. П. Фиников, С. В. Фомин*

Рефераты 3554—3926 **№ 6** **Июнь 1954 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

3554. На общем собрании (АН СССР 22—26/X 1953 г.). Вестн. АН СССР, 1953, № 11, 7—11

3555. Заседания Московского математического общества. Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 1 (59), 131—143

Приводятся резюме следующих докладов, прочитанных на заседаниях Московского математического общества:

6 октября 1953 г. Л. А. Люстерник, О разностных аппроксимациях оператора Лапласа. II. С. Б. Стечкин, О наилучшем приближении заданных классов функций любыми полиномами.

13 октября 1953 г. Б. М. Левитан, О разложении по собственным функциям уравнения Шредингера. Н. Г. Туганов, Индикатриса поверхности.

20 октября 1953 г. М. А. Красносельский, Л. А. Ладыженский, Урысоновские теоремы о спектрах неоднородных операторов. Л. А. Скорняков, Топологические проективные плоскости.

27 октября 1953 г. Ф. Р. Гантмахер, М. А. Айзерман, Об одной алгебраической задаче в теории автоматического регулирования. Ю. И. Соркин, О вложении структур.

3 ноября 1953 г. М. И. Вишик, Эллиптические уравнения, вырождающиеся на границе области.

3556. В Институте математики (хроника) (В Інституті математики (хроніка)), Вісник АН УРСР, 1954, № 1, 79—80 (укр.)

Сообщается о заседании 20 ноября 1953 г. Ученого совета Института математики АН УССР, посвященном завершению трехтомного издания сочинений Г. Ф. Вороного.

3557. XVII научная сессия факультетов физико-математического, естествознания и географии 27—29 мая 1953 г. (посвященная 20-летию Кутаисского государственного педагогического института им. Ал. Цулукидзе). План работы и тезисы докладов. 41 стр., Изд-во Кутаисского пед. ин-та, Кутаиси, 1953

3558. Обращение президента республики Клемента Готвальда по случаю торжественного открытия Чехословацкой академии наук (Dopis presidenta Republiky Klementa Gottwalda ke slavnostnímu zahájení činnosti Československé akademie věd), Časop. pěstov. mat., 1953, **78**, № 1, 1—2 (чеш.)

3559. Создание Чехословацкой академии наук (Zřízení Československé akademie věd), Časop. pěstov. mat., 1953, **78**, № 1, 3 (чеш.)

3560. Приветствие кафедры математики Чешской высшей технической школы по случаю создания Чехословацкой академии наук. Вычихло (Katedra matematiky českého vysokého učení technického vítá ustavení Československé akademie věd. Vyčichlo F.), Časop. pěstov. mat., 1953, **78**, № 1, 17—19 (чеш.)

3561. Перспективы работы партийной организации в Математическом институте Чехословацкой академии наук. Гаек (Perspektiva práce organisace KSČ v matematickém ústavě Československé akademie věd. Hájek Jaroslav), Časop. pěstov. mat., 1953, **78**, № 1, 25—26 (чеш.)

3562. Аспирантура в Математическом институте Чехословацкой академии наук. Маржик, Вейвода (Aspirantský kolektiv v matematickém ústavu Československé akademie věd. Mařík J., Vejvoda O.), Časop. pěstov. mat., 1953, **78**, № 1, 21—23 (чеш.)

3563. О состоянии отечественных исследований в области прикладной математики. Хайош (A hazai alkalmazott matematikai kutatások helyzetéről. Hajós György), Magyar tudomán. akad. mat. és fiz. osztályának közleményei, 1953, **3**, № 3, 403—416 (венг.)

Приводятся доклад Хайоша и выступления на заседании Физико-математического отделения относительно исследований по прикладной математике.

3564. Работа Института прикладной математики в области математической физики и ее промышленного применения. Эгервари (Az Alkalmazott matematikai intézet munkája a matematikai fizika és annak ipari alkalmazása terén. Egerváry Jenö), Magyar tudomán akad. mat. és fiz. osztályának közleményei, 1953, **3**, № 3, 353—362 (венг.)

Приводятся доклад Эгервари и выступления на заседании Физико-математического отделения относительно промышленного применения математической физики.

3565. Отчет о работе Физико-математического отделения Венгерской академии наук. Реньи (Beszámoló a III. Oszály munkájáról. Rényi Alfréd), Magyar tudomán. akad. mat. és fiz. osztályának közleményei, 1953, **3**, № 3, 295—309 (венг.)

3566. Немецкая подкомиссия Международной комиссии по преподаванию математики. Бенке (Deutscher Unterausschuss der IMUK. Behnke), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1953, **56**, № 2/3, ч. 2,70 (нем.)

Сообщается о составе и работе подкомиссии.

3567. Состояние и задачи математических организаций в Народной Польше. Куратовский (Stan i zadania organizacji matematyki w Polsce Ludowej. Kuratowski Kazimierz), Życie szkoły wyższej, 1953, **1**, № 11, 38—46 (польск.)

Доклад К. Куратовского 12 сентября 1953 г. на 8-м съезде польских математиков.

3568. Дискуссия (Diskuse), Slaboproudý obzor, 1953, **14**, № 10, 446—453 (чеш.)

Дискуссия о приложениях математики к физике и технике. В дискуссии приняли участие В. Долежал, Я. Маржик, В. Тркал, Л. Произа, А. С. Попова, И. Мергаут. *Ф. В. Широков*

3569. Отчет о методико-дидактической конференции математиков в Варшавском политехническом институте. Хампль (Sprawozdanie z konferencji metodyczno-dydaktycznej matematyków w Politechnice Warszawskiej. Hampel Roman), Życie szkoły wyższej, 1953, № 12, 121—125 (польск).

3570. Апрельское собрание секции Миссури (The April meeting of the Missouri Section), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 7, 516—518 (англ.)

Приведены краткие резюме докладов, представленных годичному собранию секции Миссури Математической ассоциации Америки.

3571. Апрельское собрание секции Огайо (The April meeting of the Ohio Section), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 7, 518—522 (англ.)

Приведены краткие резюме докладов, представленных 37-му годичному собранию секции Огайо Математической ассоциации Америки.

3572. Майское собрание Иллинойсской секции (The May meeting of the Illinois Section), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 9, 662—663 (англ.)

Приведены краткие резюме докладов, представленных 32-му годичному собранию Иллинойсской секции Математической ассоциации Америки.

3573. Майское собрание секции Висконсина (The May meeting of the Wisconsin Section), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 9, 665—667 (англ.)

Приведены краткие резюме докладов, представленных собранию секции Висконсина Математической ассоциации Америки.

3574. Майское собрание секции Небраски (The May meeting of the Nebraska Section), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 9, 664—665 (англ.)

Приведены краткие резюме докладов, представленных 29-му годичному собранию секции Небраски Математической ассоциации Америки.

3575. Июньское собрание Тихоокеанской северо-западной секции (The June meeting of the Pacific Northwest Section), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 9, 667—669 (англ.)

Приведены краткие резюме докладов, представленных 7-му годичному собранию Тихоокеанской северо-западной секции Математической ассоциации Америки.

3576. Второй конгресс математиков и физиков Югославии (II. Kongres matematičara i fizičara FNRJ), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1953, сер. 2, 8, № 1, 73 (хорв.)

3577. Идеологическое значение геометрии Бойаи — Лобачевского. Реньи (Ideologicky význam geometrie Bolyai—Lobačevského. Rényi Alfred), Časop. pěstov. mat., 1953, **78**, № 2, 149—167 (чеш.)

3578. Задачи и цели преподавания математики в высшей технической школе. Шиманский (Zadania i cele nauczania matematyki w wyższej szkole technicznej. Szymański Piotr), Życie szkoły wyższej, 1953, № 10, 31—40 (польск.)

3579. Замечания о значении преподавания математики в университетах. Белецкий (Uwagi o znaczeniu nauczania matematyki na uniwersytetach. Bielecki Adam), Życie szkoły wyższej, 1953, № 10, 41—53 (польск).

3580. Обмен и рассылка «Бюллетеня Французского математического общества» на 30-е июня 1953 г. (Échanges et services du Bulletin de la Société mathématique de France an 30 juin 1953), Bull. Soc. math. France, 1953, **81**, № 4, XV—XXI (франц.)

Список редакций журналов и учреждений, которым рассылается «Бюллетень Французского математического общества».

3581. Мозги: электронные и другие. Хаусхолдер (Brains: electronic and otherwise. Householder A. S.), Computing Mach. Field, 1953, **2**, № 1, 8 (англ.)

Автор, один из научных работников атомной лаборатории в Ок-Ридже (Oak Ridge National Laboratory), указывает, что появление автоматических электронных счетных машин свидетельствует о высокой ступени развития науки и техники. Для управления этими машинами необходимы хорошо подготовленные кадры. Однако в настоящее время в США, по словам автора, в силу «трагического парадокса» создалась серьезная опасность для технического образования.

Автор указывает на два источника опасности: 1) недостаток учебных помещений и квалифицированных преподавателей; недостаточность финансо-

вой и всякой другой поддержки дела образования; 2) наступление на самую основу образования, на средние школы, которое выражается в ухудшении условий в школах; снижении требований к преподавателям; подборе преподавателей на основании данных об усвоении ими курса «педагогики» без учета их фактической подготовки и знания дисциплины, которую они собираются преподавать; давлении на высшие учебные заведения в направлении снижения требований при поступлении. Автор считает, что настало время изменить положение и добиваться, чтобы в преподаваемых дисциплинах заключалось, кроме пустословия, и что-либо серьезное.

3582 РЖ. Мичиганский математический журнал. Т. 1 (The Michigan Mathematical Journal. Vol. 1, 197 pp., University of Michigan Press, Ann Arbor, 1952, 4.00 doll.) [**Рецензия**: Боас (Boas R. P., Jr), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, **59**, № 5, 483—484 (англ.)]

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

3583. Отец и сын Бойаи и неевклидова геометрия. Шаплон (Les deux Bolyai et la géométrie non-euclidienne. Chapelon Jacques), Pensée, 1953, № 48—49, 62—76 (франц.)

В первой части статьи дается популярное изложение геометрии Лобачевского-Бойаи и говорится об отношении различных систем геометрий, рассматриваемых в математике, к структуре физического пространства. Во второй части автор рассказывает о жизни и деятельности венгерского математика Фаркаша Бойаи (1775—1856) и его сына — знаменитого венгерского математика Яноша Бойаи (1802—1860), построившего независимо от Н. И. Лобачевского систему неевклидовой геометрии, которая была опубликована в 1832 г., т. е. спустя 3 года после выхода в свет работы Н. И. Лобачевского «О началах геометрии». Приводятся выдержки из писем Ф. и Я. Бойаи и Гаусса.

И. Г. Башмакова

3584. Всеволод Александрович Кудрявцев. Вестн. Моск. ун-та, 1953, № 12, 129

Некролог одного из старейших профессоров Московского государственного университета Всеволода Александровича Кудрявцева (1885—1953).

3585. Иоганн-Генрих Ламберт (1728—1777). Лау (Johann Heinrich Lambert (1728—1777). Lau Ernst), Wiss. Ann., 1953, **2**, № 7, 462—463. (нем.)

Краткий очерк жизни и научного творчества известного немецкого математика и естествоиспытателя XVIII в. Ламберта. Автор останавливается на работах Ламберта по прикладной математике, а также по физике и астрономии. *И. Г. Башмакова*

3586. Рихард фон-Мизес (Richard von Mises), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 10—11, 1 (нем.)

Некролог Рихарда Мизеса, известного немецкого математика и механика, основателя журнала «Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik».

Умер 14 июля 1953 г. в возрасте 70 лет в Бостоне (США).

3587. Первый учебник тригонометрии на румынском языке, составленный первым румынским инженером (Prima trigonometrie în limba română întocmită de primul inginer român), Ştiinţa şi tehnică, 1953, 5, № 10—11, 14 (рум.)

Краткая биография Георга Лазара (1779—1823), румынского ученого и инженера, выдающегося просветителя и патриота, участника крестьянского восстания 1821 г. против бояр и иноземных поработителей. Лазар написал несколько сохранившихся в рукописи руководств, среди них курс тригонометрии, отличающийся простотой и ясностью изложения. Дан портрет Лазара. *А. П. Юшкевич*

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

3588. Доказательство теоремы о компактности для арифметических классов. Расёва (A proof of the compactness theorem for arithmetical classes. Rasiowa H.), Fundam. math., 1952, **39**, 8—14 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Арифметическим классом называется класс всех моделей для произвольной системы аксиом 1-го рода (ср. Tarski A., Some notions and methods on the bordelinie of algebra and metamathematics, Proc. Internat. Congress Math, vol. I, 1950, 705—720). Автор доказывает так называемую теорему о плотности арифметических классов:

Если пересечение некоторого семейства арифметических классов пусто, то существует конечное подсемейство этого семейства, пересечение которого также пусто.

Это утверждение легко выводится из теоремы Гёделя о непустоте арифметического класса, определенного непротиворечивой аксиоматикой (так называемая теорема о полноте функционального исчисления). Автор дает доказательство, применимое к системе понятий, введенной Тарским (см. цитированную выше работу), целью которой является элиминация логических понятий из теории арифметических классов. Поэтому не применяется непосредственно теорема Гёделя, а проводится доказательство методом, использованным автором и Р. Сикорским для доказательства теоремы Гёделя (Fundam. math., 1950, **37**, 193—200).

Автор указывает, что посредством некоторой модификации можно получить аналогичное доказательство так называемой теоремы о плотности арифмети-

ческих функций (см. Тарский, цитированная выше работа). *J. Los*

3589. Сочленение как основа для полной системы арифметики. Лёб (Concatenation as basis for a complete system of arithmetic. Löb M. H.), J. Symbolic Logic, 1953, **18**, № 1, 1—6 (англ.)

В терминах операции сочленения $^{\circ}x^{\frown}y^{\circ}$ (это выражение означает слово, получающееся путем приписывания слова y к слову x справа) автор строит аксиоматическую систему K_0, эквивалентную системе Майхилла K (Myhill John, J. Symbolic Logic, 1950, **15**, 185—196) в смысле выразимости примитивных операторов обеих систем друг через друга. Затем показывается, что K_0 в свою очередь эквивалентна некоторой системе K_1, средствами которой может быть построена конструктивная арифметика.

Система K_1 отличается от системы Куайна (Quine W. V., J. Symbolic Logic, 1946, **11**, 105—114) только тем, что в K_1 употребляется лишь ограниченный квантор общности. Так как Куайном показано, что классическая арифметика может быть построена в его системе, то этим устанавливается некоторое взаимоотношение между конструктивной и классической арифметикой.

Система K_0 строится следующим образом:

Примитивные константы: $^{\circ}w^{\circ}$, $^{\circ}L^{\circ}$, $^{\circ}R^{\circ}$, $^{\circ}=^{\circ}$, $^{\circ}{}^{\frown}{}^{\circ}$, $^{\circ}\in^{\circ}$, $^{\circ}\hat{}^{\circ}$, $^{\circ}\bullet^{\circ}$, $^{\circ}\vee^{\circ}$ $^{\circ}(x)\,y^{\circ}$ $^{\circ}(Ex)^{\circ}$. Переменные: $x, y, \ldots$

Матрица-цепь (chain-matrix) (м.-ц.): (1) $^{\circ}w^{\circ}$, $^{\circ}L^{\circ}$, $^{\circ}R^{\circ}$ суть м.-ц.; (2) каждая переменная есть м.-ц.; (3) если x и y суть м.-ц., то и $(x^{\frown}y)$ есть м.-ц.

Формула (ф-ла), цепь, имя класса (и. к): (1) если x и y суть м.-ц., то $(x=y)$ есть матрица-суждение (м.-с.); (2) если p и q суть м.-с., то $(p\bullet q)$ и $(p\vee q)$ суть м.-с.; (3) если p есть м.-с., x и y — переменные, то $(Ex)\,p$ и $(x)\,yp$ суть м.-с., а $\hat{xp}$ есть матрица-класс (м.-к.); (4) если x — м.-ц., y — м.-к., то $x\in y$ есть м.-с.; (5) данное вхождение переменной x является связанным относительно данного вхождения (Ex), (x) или $\hat{x}$, если оно встречается в м.-с. или м.-к., начинающейся с этого вхождения (Ex), (x) или $\hat{x}$; (6) данное вхождение является связанным в некотором выражении, если последнее содержит некоторое вхождение (Ex), (x) или $\hat{x}$, по отношению к которому данное вхождение — связанное; (7) вхождение переменной в выражение является свободным в этом выражении, если оно не является связанным в этом выражении; (8) выражение является замкнутым, если никакая переменная не является в нем свободной; (9) замкнутая м.-с. есть ф-ла; замкнутая м.-ц. есть цепь; замкнутая м.-к. есть и. к.

Аксиоматическая схема для теорем: А. Если a и b становятся одинаковыми после опускания всех скобок и знаков сочленения $^{\circ}{}^{\frown}{}^{\circ}$, то $(a=b)$ есть теорема.

Правила вывода (в их формулировках $^{\circ}\left[\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right]p^{\circ}$ означает выражение, получающееся из $^{\circ}p^{\circ}$ подстановкой $^{\circ}y^{\circ}$ вместо всех свободных вхождений $^{\circ}x^{\circ}$):

I 1. $\dfrac{\cdots a\text{—}, a=b}{\cdots b\text{—}}$; I 2. $\dfrac{p, q}{p\bullet q}$; I 3a. $\dfrac{p}{p\vee q}$;

I 3b. $\dfrac{q}{p\vee q}$; I 4. $\dfrac{\left[\begin{smallmatrix}x\\a\end{smallmatrix}\right]p}{(Ex)\,p}$; I 5. $\dfrac{\left[\begin{smallmatrix}x\\a\end{smallmatrix}\right]p}{a\in\hat{xp}}$;

I 6. $\dfrac{\left(\left[\begin{smallmatrix}x\\w\end{smallmatrix}\right]p\bullet\left[\begin{smallmatrix}x\\L\end{smallmatrix}\right]p\bullet\left[\begin{smallmatrix}x\\R\end{smallmatrix}\right]p\right)}{(x)\,\xi p}$ $(\xi=w,\ L$ или $R)$;

I 7. $\dfrac{(x)\,a\,\{p\bullet[x^{\frown}w]\,p\bullet[x^{\frown}L]\,p\bullet[x^{\frown}R]\,p\}}{(x)\,a^{\frown}\xi p}$ $(\xi=w,\ L$ или $R)$..

В содержательной интерпретации: $^{\circ}w^{\circ}$, $^{\circ}L^{\circ}$ и $^{\circ}R^{\circ}$ означают $^{\circ}0^{\circ}$, $^{\circ}(^{\circ}$ и $^{\circ})^{\circ}$ соответственно; $a^{\frown}b$ — результат приписывания слова b к слову a справа; «$a=b$ истинно» означает, что слова a и b совпадают; «$p\bullet q$ истинно» — что p истинно и q истинно; «$p\vee q$ истинно» — что p и q замкнуты и хотя бы одно из них истинно; $(x)\,ap$ истинно тогда и только тогда, когда истинным является результат подстановки вместо всех свободных вхождений x в p каждой цепи, являющейся не более длинным словом, чем a (ограниченный квантор общности); $(Ex)\,p$ интерпретируется как обычный квантор существования; «$a\in\hat{x}p$ истинно» означает, что истинным является $\left[\begin{smallmatrix}x\\a\end{smallmatrix}\right]p$. Система K_1 получается из K_0, если устранить операторы $^{\circ}\in^{\circ}$ и $^{\circ}\wedge^{\circ}$, воспользовавшись определением: $^{\circ}a\in\hat{x}p^{\circ}$ есть $^{\circ}\left[\begin{smallmatrix}x\\a\end{smallmatrix}\right]p^{\circ}$, где a — м.-ц. и, далее, заменить $^{\circ}w^{\circ}$, $^{\circ}L^{\circ}$ и $^{\circ}R^{\circ}$ на $^{\circ}aba^{\circ}$, $^{\circ}abba^{\circ}$ и $^{\circ}abbba^{\circ}$ с соответствующим изменением правил вывода для $^{\circ}(x)\,a^{\circ}$. Отрицание $^{\circ}\sim^{\circ}$ выражается в K_1 посредством определений ($^{\circ}aBb^{\circ}$ означает: слово b начинается со слова a):

$x\neq y$ вместо $(Ez)\,(x^{\frown}z)=y\vee y^{\frown}z=x\vee(z^{\frown}aBa^{\frown}x\bullet z^{\frown}bBa^{\frown}y)\vee(z^{\frown}bBa^{\frown}x\bullet z^{\frown}aBa^{\frown}y)$,

$\sim(p\bullet q)$ вместо $\sim p\vee\sim q$,

$\sim(p\vee q)$ вместо $\sim p\bullet\sim q$, $\sim(x)\,p$ вместо $(Ex)\sim p$, $\sim(Ex)\,p$ вместо $(x)\sim p$.

Примечание референта. В (8) (стр. 2) автор пользуется не определенным ранее понятием свободной переменной (определено только понятие свободного вхождения в выражение); неясно, откуда берутся скобки в определении м.-ц. и в некоторых местах ниже, а также, что означают квадратные скобки в I 7; в обозначении оператора $^{\circ}(x)\,y^{\circ}$ следовало бы пользоваться каким-нибудь сопроводительным отделительным знаком (или сочетанием) после $^{\circ}y^{\circ}$, так как без этого нет необходимой однозначности в применении этого оператора.

А. С. Есенин-Вольпин

3590. Освобождение от правила подстановки для функциональных переменных. Хенкин (Banishing the rule of substitution for functional variables. Henkin Leon), J. Symbolic Logic, 1953, **18**, № 3, 201—208 (англ.)

$S'^{\,a_1,\ldots,a_n}_{b_1,\ldots,b_n}\,\mathfrak{B}$ | означает формулу функционального исчисления, получающуюся из формулы $\mathfrak{B}$ заменой каждого свободного вхождения a_i на b_i $(i=1,\ldots,n)$ (a_i — индивидуальные переменные);

$\overline{S}'^{\,c\,(a_1,\ldots,a_n)}_{\mathfrak{B}}\,\mathfrak{A}$ | означает формулу, которая получается из $\mathfrak{A}$ заменой каждой части $c\,(b_1,\ldots,b_n)$ такой, что это вхождение c в $\mathfrak{A}$ является свободным

на $S^{\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n}_{\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n} \mathfrak{B} \Big|$; здесь $\mathfrak{c}$ — n-местная функциональная переменная, $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ — различные индивидуальные переменные, $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$ — индивидуальные переменные или константы, не обязательно различные. Описанное обозначение считается определенным не всегда, а только в тех случаях, когда возникающая формула получается из $\mathfrak{A}$ путем подстановки, допустимой по правилам функционального исчисления. По поводу более точного описания автор отсылает читателя к книге Чёрча (Church A., Introduction to mathematical logic, Part I, Princeton University Press, 1944).

Автор исследует вопрос о возможности устранения схемы подстановки, описанной выше, за счет введения схемы аксиом вместо конечного числа аксиом. В упомянутой книге Чёрч вводит для этой цели, помимо схем аксиом исчисления высказываний, схемы заключения (modus ponens) и схемы генерализации (т. е. навешивания квантора общности), следующие две схемы аксиом:

$$(i)\ (\mathfrak{a})\,(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset (\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{a})\,\mathfrak{B}),$$

где $\mathfrak{a}$ — любая индивидуальная переменная, не входящая свободно в $\mathfrak{A}$ и

$$(ii)\ (\mathfrak{a})\,\mathfrak{A} \supset S^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{A} \Big|,$$

где $\mathfrak{b}$ — любая индивидуальная переменная или константа, а $\mathfrak{a}$ — индивидуальная переменная, никакое свободное вхождение которой в $\mathfrak{A}$ не возникает из-за вхождения $\mathfrak{a}$ в часть $\mathfrak{A}$ вида $(\mathfrak{b})\,\mathfrak{C}$. Это исчисление названо Чёрчем F^1.

Рассматривая исчисление второй ступени, автор обозначает через F^* исчисление, в котором допускаются кванторы по функциональным переменным, а схемы аксиом отличаются от схем для F^1 лишь тем, что $^{\mathsf{r}}\mathfrak{A}^{\mathsf{l}}$ и $^{\mathsf{r}}\mathfrak{B}^{\mathsf{l}}$ означают формулы исчисления второй ступени, а символы $^{\mathsf{r}}\mathfrak{a}^{\mathsf{l}}$ и $^{\mathsf{r}}\mathfrak{b}^{\mathsf{l}}$ могут быть как индивидуальными, так и функциональными переменными или константами (разумеется, константами могут быть только $^{\mathsf{r}}\mathfrak{b}^{\mathsf{l}}$). Доказывается, что система F^* недостаточна даже для вывода формулы $(\exists x)\,(\exists G)\,G(x)$. Поэтому вводится более сильное исчисление F^2 (это обозначение по смыслу не совпадает с аналогичным обозначением Чёрча (см. предыдущую ссылку) путем добавления к F^* схемы аксиом

$$(iii)\qquad (\mathfrak{c})\,\mathfrak{A} \supset \overline{S}^{\mathfrak{c}\,(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)}_{\mathfrak{B}}\,\mathfrak{A} \Big|,$$

в которой предполагается, что правая часть определена. Доказывается, что F^2 эквивалентно исчислению F^{**}, получающемуся путем присоединения к F^* схемы аксиом

$$(iv)\qquad (\exists \mathfrak{c})\,(\mathfrak{a}_1) \ldots (\mathfrak{a}_n)\,(\mathfrak{c}\,(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n) \equiv \mathfrak{B}),$$

в которой $\mathfrak{B}$ — любая правильно составленная формула (wff), $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ — любые различные индивидуальные переменные, а $\mathfrak{c}$ — любая n-местная функциональная переменная, не входящая свободно в $\mathfrak{B}$.

Помимо устранения сложно формулируемого правила подстановки, автор отмечает преимущество системы F^{**} перед F^2, состоящее в возможности простого выделения F^* как части F^{**}, тогда как в F^2 возможность такого выделения, как правило, затушевывается из-за того, что при наличии схемы аксиом (iii) схема (ii) не формулируется во всей общности. Система же F^* представляет интерес в связи с тем, что ее теоремы — это в точности те формулы, которые вполне истинны (completely valid) для любой модели в смысле следующего определения:

Моделью называется последовательность $(K_0, K_1, \ldots, K_n, \ldots)$ такая, что K_0 — произвольное непустое множество, K_1 — произвольный непустой класс подмножеств K_0, а при $n > 1$ K_n — есть произвольное непустое семейство n-членных отношений между элементами K_0. Пусть дана модель и wff $\mathfrak{A}$; рассмотрим распределение значений (assignement) φ, т. е. такую функцию, что $\varphi(\mathfrak{a}) \in K_0$, если $\mathfrak{a}$ — индивидуальный символ, свободно входящий в $\mathfrak{A}$, $\varphi(\mathfrak{c}) \in K_n$, если $\mathfrak{c}$ — n-местный функциональный символ, свободно входящий в $\mathfrak{A}$. Теперь обычным способом определяется значение истинности $\mathfrak{A}'$ для формулы $\mathfrak{A}$ и этого распределения значений, причем часть $(\mathfrak{c})\,\mathfrak{B}$ формулы $\mathfrak{A}$ интерпретируется как истинная тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B}$ истинна при любом распределении значения $\mathfrak{c}$ из K_n ($\mathfrak{c}$ — n-местный символ). wff $\mathfrak{A}$ называется вполне истинной по отношению к данной модели, если $\mathfrak{A}'$ есть истина для любого распределения значений φ.

Отмечается, что присоединение схемы (iv) сужает класс возможных моделей, на которых в указанном смысле интерпретируема система. Доказывается ряд предложений, например:

Пусть F^{**}_p — система, получающаяся присоединением к F^* всех формул схемы (iv), в которых $\mathfrak{B}$ не содержит связанных функциональных переменных; $\mathfrak{D}$ — теорема в системе F^{**}_p, но не в F^*; J — множество чисел n таких, что в $\mathfrak{D}$ входит n-местный функциональный символ; тогда любой вывод $\mathfrak{D}$ в F^{**}_p использует схему (iv), в которой $\mathfrak{c}$ n-местно для некоторого n в J; схема (iv) не может быть заменена конечным числом формул этой схемы; аналогично для схемы (iii) из F^2. Отмечается, что все заключения статьи сохраняют силу для функциональных исчислений высших порядков.

Примечание референта. Имеются неточности: в описании схемы (iv) следует добавить в качестве условия применимости этой схемы отсутствие в $\mathfrak{B}$ свободных переменных, отличных от $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$; в определении распределения значений термин «свободно входящий» следует заменить на «свободно входящий или постоянный».

А. С. Есенин-Вольпин

3591. Об одной проблеме Хенкина. Крейсел (On a problem of Henkin's. Kreisel G.); Koninkl. nederl. akad. wetensch., Proc., 1953, **A56**, № 4, 405—406; Indagationes math., 1953, **15**, № 4, 405—406 (англ.)

Хенкин поставил следующий вопрос (Henkin L., J. Symbolic Logic, 1952, **17**, 160): в любой формальной системе Σ, содержащей рекурсивную арифметику, можно построить формулу, имеющую q своим гёделевым числом и выражающую то, что формула с гёделевым числом q доказуема в Σ, иными словами, формулу, выражающую свою собственную доказуемость в Σ. Доказуема ли в Σ такая формула? Показывается, что можно построить как формулу,

выражающую свою собственную доказуемость в Σ и доказуемую в Σ, так и формулу, выражающую свою собственную доказуемость в Σ и независимую в Σ. В первом построении предполагается, что в Σ имеет место теорема о дедукции, во втором — что система Σ ω-непротиворечива. *В. К. Детловс*

3592 РЖ. **Введение в основания математики.** **Уайлдер** (Introduction to the foundations of mathematics. Wilder R. L., XIV + 305 pp., New York, John Wiley and Sons, Inc.; Chapman Hall, Ltd., L., 1952, 5.75 doll.; 46 s) [**Рецензии: Вон** (Vaughan H. E.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 9, 638; **Нибон** (Kneebone G. T.), Sci. Progress, 1953, **41**, № 164, 692 (англ.)]

См. также: 3866, 3867

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

3593. О некоторых нелинейных системах уравнений в целых числах. Марджанишвили К. К., Матем. сб., 1953, **33(75)**, № 3, 639—675

Рассматривается решение в целых положительных числах системы

$$x_1^k + x_2^k + \ldots + x_s^k = N_k \quad (k = l, m, \ldots, n), \qquad (1)$$

где $0 < l < m < \ldots < n$ — заданные целые числа, $0 < N_l < N_m < \ldots < N_n$ — целые, N_l достаточно велико.

Пусть g — число чисел $l, m, \ldots, n$; $N_n = P^n$ (P — действительное положительное), $N_l = h_l P^l$, $N_m = h_m P^m, \ldots$, $x_\mu = P\xi_\mu$ ($\mu = 1, 2, \ldots, s$), $n \geqslant 12$, и существует решение в действительных числах $\xi_1, \ldots, \xi_s$ ($\xi_\mu \geqslant \varepsilon > 0$, $\mu = 1, 2, \ldots, s$) системы

$$\xi_1^k + \xi_2^k + \ldots + \xi_s^k = h_k \quad (k = l, m, \ldots, n),$$

$s > 3ng$, такое, что $|\Delta| \geqslant \varepsilon$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1^{l-1}, \ldots, \xi_g^{l-1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \xi_1^{n-1}, \ldots, \xi_g^{n-1} \end{vmatrix}$$

Тогда доказывается (теорема I), что число решений $I(N_l, \ldots, N_n)$ системы (1) удовлетворяет (при $s > 3ng + 2gr$) неравенству

$$I(N_l, \ldots, N_n) > C(l, \ldots, n, s, g, \varepsilon) \times$$
$$\times N_n^{\frac{s}{n} + 2g\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^r\right) - \frac{l + \ldots + n}{n}} \times$$
$$\times \mathfrak{S}(N_l, \ldots, N_n; s) +$$
$$+ O\left(N_n^{\frac{s}{n} + 2g\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^r\right) - \frac{l + \ldots + n}{n} - \frac{\omega}{n}}\right),$$

где $r = [2n \log 10ng + n \log \log 20ng] + 1$, $C(l, \ldots, n, s, g, \varepsilon)$ и ω — некоторые положительные постоянные, $\mathfrak{S}(N_l, \ldots, N_n; s)$ — сумма особого ряда

$$\mathfrak{S}(N_l, \ldots, N_n; s) =$$
$$= \sum_{q_l, \ldots, q_n = 1}^{\infty} \sum_{1 \leqslant a_l \leqslant q_l} \ldots \sum_{1 \leqslant a_n \leqslant q_n} \left\{ \frac{1}{q_l \ldots q_n} \times \right.$$
$$\left. \times \sum_{1 \leqslant t \leqslant q_l \ldots q_n} \exp\left[2\pi i \left(\frac{a_n}{q_n} t^n + \ldots + \frac{a_l}{q_l} t^l\right)\right] \right\}^s \times$$
$$\times \exp\left[-2\pi i \left(\frac{a_n}{q_n} N_n + \ldots + \frac{a_l}{q_l} N_l\right)\right]. \qquad (2)$$

Как следует из доказательства, это неравенство устанавливается при числе слагаемых $s = O(ng \log n)$.

Далее исследуется особый ряд. Пусть при простом p

$$p^{\theta_k(p)} \setminus k,\ p^{\theta_k(p)+1} \nmid k,$$
$$\theta_0(p) = \max(\theta_l(p), \ldots, \theta_n(p)),$$
$$p^{\theta(p)} \setminus \begin{vmatrix} x_1^{n-1}, \ldots, x_g^{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_1^{l-1}, \ldots, x_g^{l-1} \end{vmatrix}$$

при любых целых $x_1, \ldots, x_g$, но $p^{\theta(p)+1}$ не делит этот определитель при некоторых целых $x_1, \ldots, x_g$. Обозначим при целом h через $W_1(p^h, s, N_l, \ldots, N_n)$ число решений системы сравнений $x_1^k + x_2^k + \ldots + x_s^k \equiv N_k \pmod{p^h}$ ($k = l, m, \ldots, n$) в целых числах $x_1, \ldots, x_s$, удовлетворяющих условиям:

$$0 < x_\gamma < p^h \quad (\gamma = 1, \ldots, g),$$
$$0 \leqslant x_\mu < p^{h - \theta_0(p) - \theta(p)} \quad (\mu = g + 1, \ldots, s),$$

через $p_1, \ldots, p_t$ — простые, не превосходящие n, и через $x_{1j}, \ldots, x_{gj}$ такие целые числа, что

$$p_j^{\theta(p_j)+1} \nmid \begin{vmatrix} x_{1j}^{n-1}, \ldots, x_{gj}^{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_{1j}^{l-1}, \ldots, x_{gj}^{i-1} \end{vmatrix}, \quad j = 1, \ldots, t.$$

Положим $u_i \equiv x_{ij} \pmod{p_j^{\theta(p_j)+1}}$, $i = 1, \ldots, g$, $j = 1, \ldots, t$ и $R = p_1^{\theta(p_1)} p_2^{\theta(p_2)} \ldots p_t^{\theta(p_t)}$.

Тогда (теорема II), если целые $N_l, \ldots, N_n$ удовлетворяют системе сравнений

$$\begin{vmatrix} N_n, u_2^{n-1}, \ldots, u_g^{n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ N_l, u_2^{l-1}, \ldots, u_g^{l-1} \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{R},$$
$$\ldots, \qquad (3)$$
$$\begin{vmatrix} u_1^{n-1}, u_2^{n-1}, \ldots, N_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1^{l-1}, u_2^{l-1}, \ldots, N_l \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{R},$$

$s \geqslant 3ng$ и $W_1(p^{h_0(p)}, s, N_1, \ldots, N_n) \geqslant 1$ при всех простых $p \leqslant n^{n+1}$, то сумма особого ряда $\mathfrak{S}(N_1, \ldots, N_n; s) > C_0(n, s) > 0$, где $h_0(p) = 2\theta(p) + 2\theta_0(p) + 1$. Или (теорема II′), если имеют место сравнения (3) и $s \geqslant g \max(p^{h_0(p)})$ для всех $p \leqslant n^{n+1}$, то также $\mathfrak{S}(N_1, \ldots, N_n; s) > C_0(n, s) > 0$.

Вместе с теоремой I это обеспечивает разрешимость системы (1) в целых положительных числах при достаточно больших $N_1, \ldots, N_n$, удовлетворяющих условиям порядка и сравнимости.

Г. В. Емельянов

3594. О представлении натуральных чисел суммой слагаемых вида $\frac{x(x+1)\ldots(x+n-1)}{n!}$.

Нечаев В. И., Изв. АН СССР, сер. матем., 1953, **17**, № 6, 485—498

Рассматривается проблема Варинга для многочленов, указанных в названии работы.

Пусть $n \geqslant 12$, $\varphi_n(x) = x(x+1)\ldots(x+n-1)$, $g(\varphi_n)$ — наименьшее целое r с условием, что всякое целое $N \geqslant 1$ представимо в форме

$$N = \frac{\varphi_n(x_1)}{n!} + \frac{\varphi_n(x_2)}{n!} + \ldots + \frac{\varphi_n(x_r)}{n!}$$

с целыми неотрицательными $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

Ранее (Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, 1951, **38**, 190—243) автором были получены неравенства

$$n + \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] \leqslant g(\varphi_n) < \frac{1}{2} n^2 \ln n + 6n \ln n.$$

В реферируемой работе существенно улучшается оценка $g(\varphi_n)$ сверху, именно доказывается, что

$$g(\varphi_n) < 6n \ln n + 9n \ln\ln n.$$

Для получения этого результата автор, используя оценку тригонометрических сумм А. Вейля (Weyl A., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1948, **34**, № 5, 204—207), улучшает известную оценку Хуа Ло-гэна для сумм

$$S(q, f(x)) = \sum_{x=1}^{q} \exp\{2\pi i f(x)/q\},$$

где $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — целые, q — целое > 0.

Устанавливается, что

$$S(q, f(x)) \ll q^{1-\frac{1}{n}}.$$

Г. В. Емельянов

3595. Количество представлений целых чисел суммой чисел из двух заданных множеств. Лоренц (Multiplicity of representation of integers by sums of elements of two given sets. Lorentz G. G.), J. London Math. Soc., 1953, **28**, ч. 4, № 112, 464—467 (англ.)

A, B, C, M обозначают множества целых положительных чисел; $A(u)$ — число элементов множества A, меньших или равных u; $d(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}$ — асимптотическая плотность множества A; $A + B$ — множество элементов вида $a + b$, где $a \in A$, $b \in B$; $\rho(n)$ — число различных представлений числа n в форме $a + b$, $a \in A$, $b \in B$ (представления $n = a + b$ и $n = a' + b'$ одинаковы, если $a = a'$, $b = b'$).

Автор доказывает теоремы:

Теорема 1. Пусть A и B — бесконечные множества и $\alpha = d(A) > 0$. Существует множество M асимптотической плотности, не меньшей чем α, такое, что $\rho(n) \to \infty$ для $n \in M$ при $n \to \infty$.

Теорема 2 (уточняет теорему 1). Если асимптотические плотности A и B равны $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, тогда: а) для каждого δ, $0 < \delta < \frac{1}{2}\alpha\beta$, существует множество C асимптотической плотности $\alpha_1 = \alpha(1 - \sqrt{2\delta/\alpha\beta})$ с $\rho(n) \geqslant \delta n$ для $n \in C$; б) если $\omega(x)$ монотонно стремится к ∞ при $x \to \infty$ и $\omega(x) = o(x)$, то существует множество C с асимптотической плотностью, не меньшей α, с $\rho(n) \geqslant \omega(n)$ для $n \in C$.

Доказательство вполне элементарно.

А. Г. Постников

3596. О проблеме Харди о распределении целых чисел с заданным числом простых делителей. I. Сатхе (On a problem of Hardy on the distribution of integers having a given number of prime factors. I. Sathe L. G.), J. Indian Math. Soc., 1953, **17**, № 2, 63—82 (англ.)

Пусть $\pi_\nu(x)$ — число чисел $\leqslant x$, представимых как произведение ν различных простых; $\sigma_\nu(x)$ — число чисел $\leqslant x$, представимых как произведение ν простых необязательно различных; $\rho_\nu(x)$ — число чисел $\leqslant x$, имеющих ν различных простых делителей;

$$\psi_\nu(x) = \frac{1}{(\nu-1)!} x (\ln\ln x)^{\nu-1} (\ln x)^{-1}.$$

Показывается, что если $0 < k$, $\nu \sim k \ln\ln x$, то $\pi_\nu(x) \sim f(k)\psi_\nu(x)$ для $k < e$;

$$\sigma_\nu(x) \sim f_1(k)\psi_\nu(x) \text{ для } k < 2;$$

$$\rho_\nu(x) \sim f_2(k)\psi_\nu(x) \text{ для } k < 2. \qquad (1)$$

Для функций $f(k)$, $f_1(k)$, $f_2(k)$ даются явные выражения, и изучается их поведение в интервале $(0, e)$. В частности, показывается, что для $\nu \sim \ln\ln x$ имеют место соотношения:

$$\pi_\nu(x) \sim \frac{6}{\pi^2}\psi_\nu(x)$$

и

$$\sigma_\nu(x) \sim \rho_\nu(x) \sim \psi_\nu(x). \qquad (2)$$

Автор замечает, что соотношение (2) имеет место для $\nu = o(\ln\ln x)$ и $\nu \sim \ln\ln x$, но неверно для $\nu \sim k \ln\ln x$, $0 < k < 1$.

Далее показывается, что (1) не имеет места для $k = 2$.

Доказательство автора базируется на соотношении

$$\pi_\nu(x) = x(\ln x)^{-1} \sum_{r=0}^{\nu-1} \frac{B_r}{(\nu-r-1)!} (\ln\ln x)^{\nu-r-1} + O(h(\nu) x (\ln x)^{-2} (\ln\ln x)^\nu / \nu!), \qquad (3)$$

где B_r $(r = 0, \ldots)$ — постоянные числа; $h(\nu)$ — некоторая функция параметра ν. Соотношение (3)

доказывается методом индукции по параметру ν, исходя из классических оценок величины

$$\pi(x) - x(\ln x)^{-1}.$$

Н. Г. Чудаков

3597. О верхней границе количества чисел Кармихаэля, меньших x. Кнёдель (Eine obere Schranke für die Anzahl der Carmichaelschen Zahlen kleiner als x. Knödel Walter), Arch. Math., 1953, **4**, № 4, 282—284 (англ.)

Составное натуральное число c, удовлетворяющее сравнению $a^{c-1} \equiv 1 \pmod c$ для каждого a, для которого $(a, c) = 1$, называется числом Кармихаэля. Автор улучшает свои результаты, опубликованные ранее (РЖМат, 1953, 1041). Воспользовавшись одним неравенством Брёйна (Bruijn N. G. de, Indagationes math., 1951, **13**, 50—60), автор получает оценку для числа чисел Кармихаэля, меньших x:

$$N(c;\ c < x) = o\left(x \exp\left[-\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon\right)\sqrt{\ln x \ln\ln x}\right]\right)$$

П. Н. Реморов

3598. О рядах Дирихле, обладающих функциональным уравнением. Кёхер (Über Dirichlet-Reihen mit Funktionalgleichung. Koecher Max), J. reine und angew. Math., 1953, **129**, № 1, 1—23 (нем.)

Исследуется обобщение дзета-функции Эпштейна, данные Зигелем (Siegel C. L., Math. Z., 1938, **43**, 682—708; 1939, **44**, 398—426).

Пусть S — матрица положительной квадратичной формы от m переменных. Положим

$$\zeta_n(S, s) = \sum_U |U'SU|^{-s},\ m \geqslant n, \qquad (1)$$

где U пробегает целочисленные неэквивалентные (относительно умножения справа на унимодулярную матрицу порядка n) матрицы из m строк и n столбцов ранга n. Выводится для этих рядов функциональное уравнение

$$R_n(S, s) = |S|^{-\frac{n}{2}} R_n\left(S^{-1},\ \frac{m}{2} - s\right), \qquad (2)$$

$$R_n(S, s) = \pi^{n\left(\frac{n-1}{4} - s\right)} \Gamma(s)\,\Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right) \times \ldots$$

$$\ldots \times \Gamma\left(s - \frac{n-1}{2}\right) \zeta_n(S, s),$$

а также устанавливается, что во всей плоскости, за исключением конечного числа полюсов первого порядка, $\zeta_n(S, s)$ регулярна. Кроме того, доказывается функциональное уравнение для рядов Дирихле, соответствующих модулярным формам Зигеля.

Пусть

$$\varphi(Z) = \sum_{T \geqslant 0} A(T) \exp[2\pi i \sigma(TZ)]$$

— модулярная форма степени n и веса k (Siegel C. L., Math. Ann., 1939, **116**, 617—657). Сопоставим такой модулярной форме ряд Дирихле

$$D_n(f, s) = 2^{-ns} \sum_{T>0} a(T) |T|^{-s},\ a(T) = \frac{A(T)}{E(T)}; \qquad (3)$$

$$f(Y) = \varphi(iY),$$

$E(T)$ — число автоморфизмов T.

Выводится функциональное уравнение для этих рядов Дирихле:

$$R_n(f, s) = (-1)^{\frac{nk}{2}} R_n(f, k - s), \qquad (4)$$

$$R_n(f, s) = \pi^{n\left(\frac{n-1}{4} - s\right)} \Gamma(s)\Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right) \times \ldots$$

$$\ldots \times \Gamma\left(s - \frac{n-1}{2}\right) D_n(f, s).$$

Исследуется вопрос о характеристике модулярных форм через ряды Дирихле. В отличие от случая $n = 1$, рассмотренного Гекке, здесь нет взаимно однозначного соответствия между рядами Дирихле и модулярными формами. Дело в том, что модулярные формы являются функциями от большего числа переменных, в то время как ряд Дирихле зависит от одного комплексного переменного. Поэтому в отличие от случая $n = 1$ при $n > 1$ из функционального уравнения для $\zeta(s)$ следует не функциональное уравнение для модулярной формы, а лишь некоторое интегральное соотношение.

И. И. Шапиро-Пятецкий

3599. О методе Н. П. Романова получения тождеств для арифметических функций. Котельянский Д. М., Украинский матем. ж., 1953, **5**, № 4, 453—458

Рассматриваются тождества, получающиеся из общего тождества

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n B_n}{\varphi_s(n)} = \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n,$$

где

$$\mathrm{Re}(s) > 1,\ \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s},$$

$$\varphi_s(n) = n^s \prod_{p/n} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right),\ \sum_{d/n} A_d = n^{s/2} \sum_{k=1} \frac{a_{nk}}{k^s},$$

$$\sum_{d/n} B_d = n^{s/2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{nk}}{k^s},$$

путем конкретизации входящих в него последовательностей a_n и b_n. Указанное общее тождество выведено референтом (Изв. АН СССР, сер. матем. 1946, **10**, 3—34).

Автор полагает $a_n = \frac{F(n)}{n^{s/2}}$, $b_n = \frac{G(n)}{n^{s/2}}$ и подробно исследует случай мультипликативных $F(n)$, $G(n)$, используя принцип обращения Мёбиуса для упрощения возникающих соотношений. Из тождеств, полученных в работе, можно отметить тождество

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)\sigma_b(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\zeta(s-a)\zeta(s-b)\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)},$$

данное без доказательства Рамануджаном (Ramanujan S., Messenger Math., 1915, 46, 81—84) и доказанное Вильсоном (Wilson B. M., Proc. London Math. Soc., 1922, 21, 235—255). *Н. П. Романов*

3600. О приближении алгебраических чисел арифметически характеризуемыми рациональными числами. Кам (Zur Annäherung algebraischer Zahlen durch arithmetisch charakterisierte rationale Zahlen. Kasch Friedrich), Math. Nachr., 1953, 10, № 1—2, 85—98 (нем.)

Изучается вопрос о разности между соседними знаменателями рациональных дробей специального вида, дающих хорошее приближение к фиксированному алгебраическому числу.

Теорема 1. Пусть α — алгебраическое число и $\zeta_1 = p_1/q_1$, $\zeta_2 = p_2/q_2$, ... — последовательность различных рациональных чисел, обладающих следующими свойствами:

1) $q_i \leqslant q_{i+1}$, $(p_i, q_i) = 1$, $i = 1, 2, 3, \ldots$,

2) $q_i = q_i' q_i''$, где q_i' и q_i'' — целые рациональные числа, причем

$$\lim_{i\to\infty} \sup \log q_i'/\log q_i = \omega_1;$$

3) существуют целые рациональные числа f_i, l_i, для которых

$$q_i'' f_i = l_i! \text{ и } \lim_{i\to\infty} \sup \log f_i/\log q_i = \omega_2;$$

4) числа p_i/q_i удовлетворяют неравенству

$$|\alpha - p_i/q_i| < \exp(-\mu \ln q_i),$$

где $\mu > 1 + \omega_1 + \omega_2[(1-\omega_1)(2+\omega_2) + \omega_1^2]$.

Тогда $$\lim_{i\to\infty} \sup \log q_{i+1}/\log q_i = \infty.$$

Кроме того, для любой подпоследовательности $\zeta_{a_1,0}, \zeta_{a_1,1}, \ldots, \zeta_{a_1,b_1}; \zeta_{a_2,0}, \ldots, \zeta_{a_2,b_2}; \zeta_{a_3,0}, \ldots$, удовлетворяющей условиям

1) $$\lim_{i\to\infty} \inf_{0\leqslant n<b_i} \log q_{a_i,n+1}/\log q_{a_i,n} = \eta$$

и 2) $$\lim_{i\to\infty} \log b_i/\log q_{a_i,0} = \infty, \text{ если } \eta = 1,$$

$$\lim_{i\to\infty} b_i = \infty, \text{ если } \eta > 1,$$

будет

$$\lim_{i\to\infty} \sup_{0\leqslant n<b_i} \log q_{a_i,n+1}/\log q_{a_i,n} = \infty.$$

Эта теорема может быть использована для построения трансцендентных чисел. Именно, доказывается теорема 2.

Теорема 2. Пусть $\xi = \sum_{\nu=0}^{\infty} \rho_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{r_\nu}{u_\nu!}$. Если

1) u_ν — натуральные числа и $\lim_{\nu\to\infty} \inf u_{\nu+1}/u_\nu = c > 1$,

2) $r_\nu = s_\nu/t_\nu$, где s_ν, t_ν — целые рациональные числа, для которых $t_\nu > 0$ и

$$|s_\nu|, t_\nu \leqslant \exp(d^\nu \ln B), \quad B > 0, \quad d < c,$$

3) существует бесконечная последовательность отличных от нуля членов ряда $\rho_{a_1,0}, \rho_{a_1,1}, \ldots, \rho_{a_1,b_1}; \rho_{a_2,0}, \ldots, \rho_{a_2,b_2}; \rho_{a_3,0}, \ldots$, для которой $\lim_{i\to\infty} b_i = \infty$ и $\lim_{i\to\infty} \sup u_{a_i,n+1}/u_{a_i,n} < \infty$, то число ξ будет трансцендентным.

Опечатки: 1) стр. 92, строка 5 снизу: вместо $\exp(\tau_k \ln q_k)$ должно быть $\exp(\tau_k \ln q_k'')$; 2) стр. 93, в формуле (16) вместо τ_k/r_k должно быть τ_k; 3) стр. 94, строка 12 снизу, сказано, что можно взять $\varepsilon = \delta$; должно быть: ε так можно выбрать в зависимости от δ, чтобы выполнялись следующие ниже неравенства. *Н. И. Фельдман*

3601. О некоторой классификации подходящих дробей. Кёйперс, Мёленбелд (On a certain classification of the convergents a continued fraction. Kuipers L., Meulenbeld B.), Nieuw arch. wiskunde, 1953, 1, № 3, 199—211 (англ.)

Подходящие дроби $\delta_n = P_n/Q_n$ распределяются по 8 классам в зависимости от остатка чисёл P_n и Q_n по модулю 3. Для вычисления класса дроби δ_n достаточно знать последовательность наименьших вычетов

$$r(q_1), \ldots, r(q_n) \qquad (1)$$

по модулю 3 неполных частных $q_1, \ldots, q_n$. Табулируются все возможные 144 случая распределения классов трех следующих дробей $\delta_k, \delta_{k+1}, \delta_{k+2}$. Для удобного вычисления класса выработан способ, не изменяя класса, сокращать последовательность (1) до $\leqslant 5$ членов. Целью своих исследований авторы считают следующую недоказанную (в опубликованной части работы) теорему:

Любому иррациональному числу α соответствуют, по крайней мере, 4 класса, содержащие бесконечно много подходящих дробей P/Q, удовлетворяющих неравенству $|\alpha - P/Q| < Q^{-2}$. Аналогичные вопросы о классификации подходящих дробей по модулю 2 были исследованы теми же авторами (Acta math., 1951, 87, 1—12), Робинсоном (Robinson, Duke Math. J., 1940, 7, 354—359) и др. *Э. К. Фогелс*

3602. Распределение тригонометрических последовательностей mod 1. Ле-Век (The distribution modulo 1 of trigonometric sequences. LeVeque W. J.), Duke Math. J., 1953, 20, № 3, 367—374 (англ.)

Работа является продолжением предыдущей работы автора (Michigan Math. J., 19 2, 1, 139—162).

Пусть $\Phi(x)$ — вещественная периодическая функция вещественного аргумента с периодом ω, имеющая третью непрерывную производную и удовлетворяющая следующим условиям: 1) $\Phi'(x)$ и $\Phi''(x)$ имеют только конечное число нулей в $(0, \omega)$; 2) $\Phi'(x)$ и $\Phi''(x)$, а также $\Phi''(x)$ и $\Phi'''(x)$ нигде одновременно не обращаются в нуль. Пусть, далее,

$$S = \sum_{n=1}^{N} \exp(2\pi i \beta u_n \Phi(v_n x - \alpha)),$$

где $\beta \neq 0$ — целое число, α — вещественное число, $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ — положительные последовательности.

Основные результаты следующие:

1. Если $\{u_n\}$ — лакунарная, $\{v_n\}$ — неубывающая последовательности, то для почти всех x

$$S \ll N^{\frac{1}{2}} (\log N)^{\frac{3}{2}+\theta} \quad (\theta > 0).$$

2. Если $\{v_n\}$ — лакунарная последовательность, $\{u_n\}$ — неубывающая последовательность такая, что $n^{2\varepsilon} \ll u_n$, то для почти всех x

$$S \ll \begin{cases} N^{1-\delta} & \left(\delta < \frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ при } 0 < \varepsilon < 1, \\ N^{\frac{1}{2}} (\log N)^{\frac{5}{2}+\theta} & (\theta > 0) \quad \text{при } \varepsilon = 1, \\ N^{\frac{1}{2}} (\log N)^{\frac{3}{2}+\theta} & (\theta > 0) \quad \text{при } \varepsilon > 1. \end{cases}$$

Если ни одна из последовательностей $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ не лакунарна, то аналогичные результаты доказываются только для случая, когда $\Phi(x) = \sin x$ или $\cos x$ и $\{v_n\}$ — некоторая последовательность целых чисел.

Следствием этих оценок является равномерность распределения mod 1 последовательностей $\{u_n \Phi(v_n x - \alpha)\}$ для почти всех x при указанных выше $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$. В частности, последовательность $\{z^n\}$, $z = x + iy$, равномерно распределена mod 1 на комплексной плоскости для почти всех z с $|z| \geqslant 1$.

И. П. Кубилюс

3603. Усиление одной теоремы Харди — Литлвуда. Сюс (Verschärfung eines Hardy — Littlewoodschen Satzes. Szüsz P.), Acta math. Acad. sci. hung., 1953, **4**, № 1—2, 115—118 (нем.; резюме русск.)

Уточняется следующая теорема Харди и Литлвуда (Hardy G. H., Littlewood E. J., Acta math., 1914, **37**, 156—239):

Пусть ω — вещественное иррациональное число, k — натуральное число; $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — вещественные числа, $0 \leqslant \alpha_\varkappa < 1$ ($\varkappa = 1, \ldots, k$). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно найти целое число n, удовлетворяющее системе неравенств

$$|\{n^\varkappa \omega\} - \alpha_\varkappa| < \varepsilon \quad (\varkappa = 1, \ldots, k). \qquad (1)$$

Здесь $\{x\}$ — дробная часть x.

Доказывается существование числа m, зависящего только от ε, k и ω, такого, что при любом вещественном ν (1) выполняется, по меньшей мере, для одного целого $n \in [\nu, \nu + m]$. Отмечается, что аналогичный результат имеет место для системы вещественных иррациональных линейно независимых чисел $\omega_1, \ldots, \omega_l$.

И. П. Кубилюс

3604. Многомерные задачи распределения дробных долей. Коробов Н. М., Изв. АН СССР, сер. матем., 1953, **17**, № 5, 389—400

Развивается новый метод, позволяющий строить числа $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$ такие, что равномерно распределены системы функций

$$\alpha\lambda^x f_1(x), \ldots, \alpha\lambda^x f_s(x) \text{ и } \alpha_1\lambda^x f(x), \ldots, \alpha_s\lambda^x f(x).$$

Здесь $s \geqslant 1$; $\lambda > 1$ — целое число или число Пизо; $f_1(x), \ldots, f_s(x)$ — система линейно независимых целочисленных полиномов; $f(x)$ — целочисленный полином, не обращающийся тождественно в нуль.

Основным средством этого является нижеследующая лемма:

Пусть $\psi(x) = a_1\psi(x-1) + \cdots + a_n\psi(x-n)$ — целочисленная рекуррентная последовательность (состоящая не из одних нулей) такая, что характеристическое уравнение $\lambda^n = a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$ имеет различные корни и что для величин $\lambda = \lambda_1$ и $\theta = \max_{2 \leqslant i \leqslant n} |\lambda_i|$ выполнены неравенства $\lambda > 1$, $\theta < 1$; p — простое растущее; $\tau > 0$ — целое, удовлетворяющее условиям $\psi(x+\tau) \equiv \psi(x) \pmod p$, $\tau \not\equiv 0 \pmod p$; N — число решений сравнений $\psi(x) \equiv 0 \pmod p$, $x = 1, 2, \ldots, \tau$; $f(x)$ — целочисленный полином (возможно константа), не равный нулю по модулю p. При любых целых $a \geqslant 0$ и $r \geqslant 1$ справедлива оценка

$$\left|\sum_{x=1}^{rp\tau} \exp\left[2\pi i \frac{\psi(x) f(a+x)}{p(\lambda^\tau - 1)}\right]\right| < Cr[Np + \tau + p\ln(a + r\tau)].$$

А. Г. Постников

3605. Заметка о работе Сойера «Произведение двух неоднородных линейных форм». Морделл (Note on Sawyer's paper «The product of two non-homogeneous linears forms». Mordell L. J.), J. London Math. Soc., 1953, **28**, ч. 4, № 112, 510—512 (англ.)

Пусть Λ — решетка на плоскости такая, что R — область, определяемая неравенством $|xy| \leqslant \frac{1}{4}\Delta$ ($\Delta > 0$), — не содержит точек Λ. Доказывается существование либо треугольника с вершинами из Λ, лежащими в различных координатных углах, свободного от иных точек Λ и содержащего начало координат (откуда получается теорема Минковского о произведении двух неоднородных форм), либо существование четырехсторонника, необходимого Сойеру (Sawyer, J. London Math. Soc., 1948, **23**, 250—251) в его доказательстве теоремы Минковского, чего сам Сойер не сделал.

Д. С. Горшков

3606. О количестве точек данной решетки в случайной гиперсфере. Кендалл, Ранкин (On the number of points of a given lattice in a random hypersphere. Kendall David G., Rankin R. A.), Quart. J. Math., 1953, **4**, № 15, 178—189 (англ.)

В предыдущей работе одного из авторов (Kendall D. G., Quart. J. Math., 1948, **19**, 1—26) рассматривалось число точек квадратной решетки, лежащих: 1) в случайно расположенном круге данного радиуса и 2) в случайно расположенном овале данной формы и данного размера.

Реферируемая работа посвящена обобщению задачи 1) на k-мерный случай. Пусть Λ — решетка в k-мерном евклидовом пространстве R

$$x_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} y_j \quad (i = 1, \ldots, k;\ y_j = 0, \pm 1, \ldots)$$

с $\Delta = \det a_{ij} > 0$; $q(Y)$ — ассоциированная с Λ, а $Q(Y)$ — присоединенная для $q(Y)$ квадратичные

формы. Пусть $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ — случайная точка, лежащая в одном из основных параллелепипедов решетки и равномерно распределенная в нем; $l(\rho,\alpha)$ — число точек решетки Λ, лежащих в гиперсфере

$$\sum_{i=1}^{k}(x_i-\alpha_i)^2\leqslant\rho^2.$$

При помощи разложения $l(\rho,\alpha)$ в k-кратный ряд Фурье подсчитывается математическое ожидание случайной величины $l(\rho,\alpha)$

$$E=\frac{K_k\rho^k}{\Delta},\quad K_k=\frac{\pi^{\frac{1}{2}k}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}k+1\right)},$$

и дисперсия

$$\sigma^2=\Delta^{k-2}\rho^k\sum_{Y\neq0}\left\{J_{\frac{1}{2}k}\left(\frac{2\pi\rho}{\Delta}\sqrt{Q(Y)}\right)^2\right\}\left\{Q(Y)\right\}^{-\frac{1}{2}k},$$

причем сумма берется по всем целым точкам $Y\neq0$ пространства R, J_ν — функция Бесселя.

Доказываются оценки $\sigma^2=O(\rho^{k-1})$, $\sigma^2=\Omega(\rho^{k-1})$. Дается также выражение для σ^2 в конечном виде, более удобное для вычислений при небольших ρ,

$$\sigma^2=\frac{K_k\rho^k}{\Delta}\left(1-\frac{K_k\rho^k}{\Delta}\right)+\frac{1}{\Delta}\sum_{Y\neq0}V(\rho,\sqrt{q(Y)},$$

где $V(\rho,t)$ — объем «луночки», образуемой пересечением двух гиперсфер радиуса ρ, когда центры отделены на расстояние t.

Отдельно приводятся результаты для двумерного случая, когда Λ — шестиугольная решетка, и сравниваются с результатами 23 000 опытов, произведенных Райтом (G. Wright). Согласие получается хорошее. *И. П. Кубилюс*

3607. Арифметические свойства многочленов. Эрдёш (Arithmetical properties of polynomials. Erdös P.), J. London Math. Soc., 1953, **28**, ч. 4, № 112, 416—425 (англ.)

Пусть $f(x)$ — многочлен степени $l\geqslant3$ с целыми коэффициентами, наибольший общий делитель которых равен 1, не делящийся на l-1-ю степень линейного множителя с целыми коэффициентами. В случае $l=2^s$ делается дополнительное предположение, что $f(n)\not\equiv0\pmod{2^{l-1}}$ хотя бы при одном n.

Доказывается, что существует бесчисленное множество целых чисел n таких, что $f(n)$ не делится на l-1-ю степень какого-либо простого числа, т. е., как это принято говорить, свободно от l-1-х степеней.

Утверждается, что аналогичным методом может быть доказано, что каждое достаточно большое целое число является суммой l-й степени и числа, свободного от l-1-х степеней.

А. А. Бухштаб

3608. Приложения арифметики кватернионов к теории тернарных квадратичных форм и к разложению чисел на кубы. Линник Ю. В., Малышев А. В., Успехи матем. наук, 1953, **8**, № 5(57), 3—71

Реферируемая статья является продолжением статьи Ю. В. Линника (Успехи матем. наук, 1949, **4**, № 5(33), 49—98).

Как известно, вопрос о представлении чисел квадратичными формами с большим числом переменных (бо́льшим четырех) полностью решается при помощи аналитических средств (Тартаковский В. А., Изв. АН СССР, сер. физ.-матем., 1929, 111—122, 165—196). Для случая, когда число переменных равно трем, аналитические методы теряют свою силу. Реферируемая статья содержит весьма подробные исследования вопросов о представимости чисел квадратичными формами от трех переменных.

Глава первая содержит доказательство теоремы о представлении целых чисел так называемыми удобными формами. Доказывается, что всякое достаточно большое число, удовлетворяющее определенным сравнениям, представимо удобной формой. Этот результат впервые получен Ю. В. Линником (Изв. АН СССР, сер. матем., 1940, **4**, 363—402). Кроме того, в этой главе дается оценка А. В. Малышева для числа представлений. Эта оценка уже не может быть улучшена в отношении порядка. Важную роль в доказательстве этих результатов играет кватернионная интерпретация представлений числа удобной формы. Оказывается, что наличие представления эквивалентно некоторому кватернионному равенству.

Вторая глава посвящена представлению больших чисел формами, взаимными к удобным. В отличие от главы первой, на представляемые числа приходится накладывать некоторые дополнительные условия, повидимому, связанные с методом доказательства. В этой главе, так же как и в первой, существенную роль играет кватернионная интерпретация.

В третьей главе исследуется распределение представлений чисел удобными формами по классам вычетов. Устанавливаются достаточные условия, при которых имеются представления, принадлежащие любому заданному классу вычетов. Сначала этот вопрос исследуется для формы $x^2+y^2+z^2$, затем при помощи полученного метода вопрос решается для всех удобных форм.

Последняя четвертая глава содержит применения результатов, полученных во второй главе, к разложению чисел на шесть или семь кубов. В ней дается изложение результатов Ю. В. Линника (Матем. сб., 1943, **12** (54), № 1, 220—224) о том, что всякое достаточно большое число можно представить в виде семи кубов. Кроме того, в ней указан один общий случай разложения чисел на шесть кубов.

И. И. Шапиро-Пятецкий

3609. О целочисленных решениях уравнения $x^2+y^2+z^2+2xyz=n$. Морделл (On the integer solutions of the equation $x^2+y^2+z^2+2xyz=n$. Mordell L. J.), J. London Math. Soc., 1953, **28**, ч. 4, № 112, 500—510 (англ.)

Доказана для некоторых n неразрешимость в целых числах уравнения, указанного в заглавии. Просто доказана теорема Гурвица: если $n=0$, то единственным решением является $x=y=z=0$. Найдены все решения в случае, когда $n=1$ (решения параметрические, однако три из пяти параметров связаны равенством $A^2-\lambda B^2=1$). Показано, как во многих других случаях, зная одно решение, можно получить остальные. *Д. С. Горшков*

3610. **2-группа классов алгебраических полей второго порядка и теория уравнения Пелля.** Рédei (Die 2-Ringklassengruppe des quadratischen Zahlkörpers und die Theorie der Pellschen Gleichung. Rédei Ladislaus), Acta math. Acad. sci. hung., 1953, **4**, № 1—2, 31—87 (нем.; резюме русск.)

Пусть Ω — квадратичное поле дискриминанта $D = d$ или $4d$, m — некоторое взаимно простое с D нечетное бесквадратное натуральное число, p_∞ — бесконечное простое место, $\tilde{m} = mp_\infty$, $H_{\tilde{m}}$ — мультипликативная группа чисел Ω (или порождаемых этими числами главных идеалов), взаимно простых с $\tilde{m}$ и сравнимых с рациональными числами по $\bmod \tilde{m}$. Наконец, H — группа тех идеалов Ω, нечетные степени которых принадлежат $H_{\tilde{m}}$. Группу классов идеалов, входящих в H, автор называет 2-группой классов (2-Ringklassengruppe) по $\bmod \tilde{m}$. Порядок этой группы есть степень двух.

Первая задача, которой уделяется наибольшее внимание, — определение структуры этой группы.

Пусть, далее, $m = m'm''$, а $d = d'd''$ или $4d'd''$, причем первое равенство имеет место, когда $d' \equiv 1 \pmod 4$, второе, когда $d \equiv 3 \pmod 4$, и в первом случае d' и d'' — числа целые, а во втором $2d'$ и $2d''$ — нечетные целые числа и, кроме того, в обоих случаях $d' > 0$. Ставятся следующие три задачи:

1) Для данного натурального n выяснить разрешимость в целых числах неопределенного уравнения

$$d'm'^2x'^2 - d''m''^2x''^2 = z^{2n}, \qquad (1)$$

причем $(m', x', m'', x'', z) = 1$ и $2 \nmid z$.

2) Аналогичная задача для уравнения

$$d'm'^2x'^2 - d''m''^2x''^2 = 1. \qquad (2)$$

3) То же для уравнения

$$x^2 - dm^2y^2 = -1. \qquad (3)$$

Связь последних трех задач между собой очевидна, ибо из разрешимости второго уравнения следует разрешимость первого при любом n, а третье есть частный случай второго при $d' = d$ и $m' = m$. Для исследования этих задач рассматриваются четверки чисел $S = (d', d'', m', m'')$, для которых определяется действие умножения по следующему закону: если $S_1 = (d_1', d_1'', m_1', m_1'')$ и $S_2 = (d_2', d_2'', m_2', m_2'')$, то $S_1S_2 = (d', d'', m', m'')$, и числа этой четверки определим так, что $d_1'd_2'd'$, $m_1'm_2'm'$ и т. д. — полные квадраты. Тогда множество всех возможных четверок (при данных d и m) образуют группу $\mathfrak{S}$, имеющую порядок, также равный степени двойки. Если же ограничиться только теми четверками, для которых разрешимо уравнение (1) при данном n, то множество этих четверок образует подгруппу группы $\mathfrak{S}$.

Далее рассматривается число $\xi = m'x'\sqrt{d'} + m''x''\sqrt{d''}$, которому, с одной стороны, ставится в соответствие четверка (d', d'', m', m''), а с другой стороны, отмечается, что множество всех чисел Ω, делящихся на ξ, образует идеал, принадлежащий некоторому классу A. Таким образом, между некоторыми классами идеалов Ω и четверкой устанавливается соответствие, являющееся гомоморфозным. Это позволяет последние задачи свести к первой, но согласно результатам, полученным в предыдущей работе автора (Acta math. Acad. sci. hung., 1953, **4**, 1—29), эта задача связана с вопросом построения некоторых полей классов K_n. В данном конкретном случае такое построение оказывается возможным, что и устанавливается во второй части работы.

В последнем параграфе получены некоторые частные результаты, вытекающие из общей теории. Например, доказана теорема: если $d > 0$ и m не содержат простых делителей вида $4n + 3$, то уравнение (3) разрешимо. *В. Д. Подсыпанин*

3611. **О дружественных числах. II.** Канольд (Über befreundete Zahlen. II. Kanold Hans-Joachim), Math. Nachr., 1953, **10**, № 1—2, 99—111 (нем.)

Работа является продолжением работы автора того же названия (РЖМат, 1954, 1967), где содержится необходимое определение. В начале работы дается несколько необходимых условий того, чтобы пара m_1 и m_2 была дружественной (без ограничения на число простых делителей m_1 и m_2). В дальнейшем автор интересуется случаем, когда $m_1 = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$, и доказывает теоремы:

Теорема 4. Пусть $m_1 = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$,

$$\alpha_1 \not\equiv 3 \pmod 4, \quad \alpha_2 \equiv 0 \pmod 2,$$

$$m_2 = \prod_{\lambda=1}^{l} q_\lambda^{\beta_\lambda}, \quad \beta_\lambda \equiv 1 \pmod 2 \text{ для } \lambda = 1, \ldots, l.$$

При таких условиях m_1 и m_2 не могут быть дружественными.

Теорема 5 устанавливает необходимое условие в случае, если $m_1 = 2^\alpha p_2^{\alpha_2}$ и m_2 — нечетное.

Наиболее просто формулируется теорема 6: если $m_1 = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$ и $m_2 = q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}$ — два дружественных числа, то $m_1 = m_2$ и они являются четными совершенными числами. *А. Г. Постников*

3612. **Некоторые новые условия существования нечетных совершенных чисел.** Канольд (Einige neuere Bedingungen für die Existenz ungerader vollkommener Zahlen. Kanold Hans-Joachim), J. reine und angew. Math., 1953, **192**, № 1, 24—34 (нем.)

Известно, что если нечетные совершенные числа существуют, то они имеют вид

$$n = p^\alpha \prod_{\rho=1}^{r} q_\rho^{2\beta_\rho},$$

где $p \equiv \alpha \equiv 1 \pmod 4$.

Доказываются следующие теоремы:

Пусть a — количество простых чисел q_ρ таких, что $q_\rho \equiv 1 \pmod p$. Если на показатели $2\beta_\rho$ наложить условие $(p-1, 2\beta_\rho + 1) = 1$, то $1 < a < r$ и α ограничено, а именно $\alpha \leqslant {}^1/_4 (a-1)(3a-2)$, если, хотя бы для одного ρ, $1 + q_\rho + \ldots + q_\rho^{2\beta_\rho}$

делится на $p^{\alpha-1}$, и $\alpha \leqslant \min\left(a(a-2); \frac{3a(a-1)}{4}\right)$ в противном случае.

Если через a обозначить количество простых чисел q_ρ таких, что $q_\rho \equiv 1 \pmod{q_1}$, то при условии $\left(q_1-1, \frac{\alpha+1}{2}\right) = (q_1-1, 2\beta_\rho+1) = 1$ имеют место неравенства: $2 < a < r-1$, если $p \not\equiv \pm 1 \pmod{q_1}$; $1 < a < r$, если $p \equiv 1 \pmod{q_1}$; $a < r$, если $p \equiv -1 \pmod{q_1}$. Кроме того, приводятся неравенства, ограничивающие сверху показатель $2\beta_1$.

В заключение доказывается, что нечетные совершенные числа не могут быть ни вида $n = p^\alpha q_1^4 q_2^4 \prod_{\rho=3}^{r} q_\rho^2$, ни вида $n = p^5 \prod_{\gamma=1}^{k} q_\gamma^2 \prod_{\lambda=k+1}^{r} q_\lambda^4$.

В. Д. Подсыпанин

3613. Особенное уравнение 4-й степени. Самко Г. П., Уч. зап. Ростовского-на-Дону гос. пед. ин-та, 1953, № 2, 9—19

Рассматривается уравнение 4-й степени

$$x^4 + qx^2 + rx + s = 0 \qquad (1)$$

с рациональными коэффициентами, которое называется особенным, если его кубическая резольвента имеет один рациональный и два мнимых корня, причем рациональный корень определяется в явном виде по формуле Кардано. Кубическое уравнение такого вида также называется особенным.

Общий вид особенного полного кубического уравнения получен Куммером. Путем простых выкладок автор получает особенное уравнение типа (1), имеющее вид

$$x^4 + \left(a - \frac{b^2 v}{2}\right)x^2 \pm b\mu v x + \frac{b^2 v}{4}\left(\frac{b^2 v}{4} + a\right) - \frac{c^2}{12} = 0, \qquad (2)$$

где a, b, c — произвольные рациональные числа; μ и v определяются по числам a и c равенством $a^2 + \frac{c^2}{3} = \mu^2 v$, в котором μ и v — рациональные числа, причём v — рациональное число, не имеющее квадратных делителей.

Далее автор связывает уравнение (2) с решением в рациональных числах уравнения

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 27t^3, \qquad (3)$$

показывая, что решение уравнения (3) выражается через коэффициенты уравнения (2) следующим образом:

$$x = b^2 v - 2a;\ y = a + b^2 v + c;\ z = a + b^2 v - c;\ t = \pm b\mu v. \qquad (4)$$

Если же придавать числам a, b и c целые рациональные значения, то формулы (4) дают полное решение уравнения (3) в целых рациональных числах.

При некоторых ограничениях, накладываемых на целые значения a, b и c, дается также решение в целых числах уравнения

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = t^3.$$

В. И. Козицын

3614. Некоторые теоремы о сравнениях Куммера. Карлиц (Some theorems on Kummer's congruences. Carlitz L.), Duke Math. J., 1953, 20, № 3, 423—431 (англ.)

Пусть p — фиксированное простое число. Рассматриваются последовательности $\{a_m\}$ рациональных чисел a_m, целых (mod p), т. е. знаменатель которых не делится на p; более обще, можно предполагать a_m целыми p-адическими числами. Говорят, что $\{a_m\}$ удовлетворяет сравнению Куммера, если для всех $m \geqslant r \geqslant 1$

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} a_{m+s(p-1)}\, a_p^{r-s} \equiv 0 \pmod{p^r}.$$

Изучаются свойства таких последовательностей $\{a_m\}$. Доказывается, в частности:

1. Если последовательности $\{a_m\}$ и $\{b_m\}$ удовлетворяют сравнению Куммера, то такова же и последовательность $\{c_m\} = \{a_m b_m\}$.

2. Если $\{a_m\}$ удовлетворяет сравнению Куммера и $c_m^{(k)} = m^k a_m$, $k \geqslant 1$, то

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} c_{m+sp(p-1)}^{(k)}\, a_p^{r-s} \equiv 0 \pmod{p^r}.$$

Приводится еще ряд свойств последовательностей $\{a_m\}$.

Полученные результаты прилагаются к числам Эйлера, E_m, $E_m^{(k)}$; к числам Бернулли; к числам Стирлинга второго рода; к коэффициентам эллиптических функций Якоби. Для таких чисел можно получить сравнения типа Куммера.

А. В. Малышев

3615. О функции $E(x)$ (целая часть x). Перес Качо (Sobre la funcion $E(x)$ (entero de x). Pérez-Cacho L.), Rev. mat. hisp.-amer., 1953, сер. 4, **13**, № 3, 188—195 (исп.)

Для функции $E(x)$ путем индукции выводится известная формула

$$\sum_{x \leqslant n} f(x)\, E\left(\frac{n}{x}\right) = \sum_{x=1}^{n} F(x),$$

где $f(x)$ и $F(x)$ связаны соотношением

$$F(n) = \sum_{\delta \mid n} f(\delta).$$

Далее вводится функция $q(n)$, определяемая как число нечетных чисел в ряду $E\left(\frac{n}{1}\right), E\left(\frac{n}{2}\right), \ldots, E\left(\frac{n}{n}\right)$. Для нее доказываются сумматорные формулы, связывающие её с числом делителей соответствующих чисел.

Ю. Л.

См. также: 3556

АЛГЕБРА

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

3616. Проблемы теории матриц и их применения. Швердтфегер (Problems in the theory of matrices and its applications. Schwerdtfeger H.), Austral. J. Sci., 1953, **15**, № 4, 112—115 (англ.)

Дается элементарное представление о матрицах и о задачах, возникающих в матричной алгебре. Указываются некоторые применения матриц в физике. *А. Г.*

3617. Границы для определителей с преобладающей главной диагональю. Хейнсуэрт (Bounds for determinants with dominant main diagonal. Haynsworth Emilie V.), Duke Math. J., 1953, **20**, № 2, 199—209 (англ.)

По терминологии автора, $A = |a_{ik}|_1^n$ (a_{ik} — комплексны) является определителем с преобладающей главной диагональю, если

$$|a_{ii}| \geqslant \sum_{k \neq i} |a_{ik}| \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (1)$$

Основные результаты статьи:

1. Если выполнено (1), то

$$|A| \geqslant |a_{11}| \prod_{k>1} d_k^{(k)} + \sum_{i>1} \left(\sum_{j<i} |a_{ij}| \right) \prod_{h<i} d_h^{(i)} \prod_{k>i} d_k^{(k)},$$

$$|A| \leqslant |a_{11}| \prod_{k>1} S_k^{(k)} - \sum_{i>1} \left(\sum_{j<i} |a_{ij}| \right) \prod_{h \leqslant i} d_h^{(i)} \prod_{k>i} S_k^{(k)},$$

где

$$d_i^k = |a_{ii}| - \sum_{j \neq i}^{k} |a_{ij}|; \quad S_i^{(k)} = |a_{ii}| + \sum_{j \neq i}^{k} |a_{ij}|.$$

2. Если выполнено (1) и все $a_{ij} > 0$, то

$$A \geqslant 2(n-1)(n-2)^{n-1} \prod_i \tilde{a}_i; \quad \tilde{a}_i = \min_{j \neq i} a_{ij}.$$

3. Если выполнено (1), все a_{ij} вещественны, $a_{ii} > 0$ и $a_{ij} < 0$ при $i \neq j$, то

$$A \geqslant d(n+d)^{n-1} \prod_i a_i,$$

где

$$a_i = \min_j |a_{ij}|; \quad d = \min_i \frac{d_i^{(n)}}{a_i}.$$

4. При помощи устанавливаемого в работе достаточного признака неотрицательности определителя с положительными элементами автор получает оценку снизу для любого вещественного собственного значения матрицы A с положительными элементами:

$$\lambda \geqslant \min_i \left[a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| + (n-2)(2a_i - a_i^*) \right]$$

(на стр. 207 ошибочно напечатано $2a_i + a_i^*$), где $a_i^* = \max_{j \neq i} a_{ij}$. Приводится пример матрицы, для которой указанная граница достигается.

5. Рассматриваются матрицы, элементы которых являются линейными функциями от x с вещественными коэффициентами.

Доказано, что определитель $|x + a_{ij}|_1^n$ монотонно растет для всех x, если

$$a_{ii} - \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \geqslant n a_i^* \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

а определитель $|a_{ij}x + b_{ij}|_1^n$, в котором a_{ij} удовлетворяют (1), монотонно растет для всех x, для которых он имеет положительную преобладающую главную диагональ. *Д. М. Котелянский*

3618. Об унитарной эквивалентности. Литлвуд (On unitary equivalence. Littlewood D. E.), J. London Math. Soc., 1953, **28**, ч. 3, № 111, 314—322 (англ.)

Рассматривается задача о приведении произвольной квадратной матрицы к канонической форме при помощи унитарных преобразований; задача была ранее решена Бреннером (Brenner J., Acta math., 1951, 86, 297—308); однако в данной статье решение получается в значительно более простой форме. Сначала рассматривается случай, когда все собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы A различны. Нумеруя их так, чтобы $|\lambda_j| \leqslant |\lambda_{j+1}|$ и $\arg \lambda_j < \arg \lambda_{j+1}$ при $|\lambda_j| = |\lambda_{j+1}|$, автор приводит матрицу A обычным методом к треугольной форме

$$\left\| \begin{matrix} \lambda_1 & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{matrix} \right\|$$

при помощи унитарного преобразования, определенного однозначно с точностью до произвольного диагонального унитарного множителя. Этот множитель подбирается так, чтобы максимальное число элементов $a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n}, a_{23}, \ldots, a_{n-1,n}$, взятых в указанном порядке, было положительным. Полученная в результате треугольная матрица и является искомой канонической формой. Далее рассматривается случай матрицы A, имеющей кратные собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, занумерованные, как и выше. Пусть $(\lambda - \lambda_1)^{a_1}(\lambda - \lambda_2)^{a_2} \ldots (\lambda - \lambda_r)^{a_r} = 0$ — характеристическое уравнение матрицы A; аналогичным образом A приводится при помощи некоторого унитарного преобразования V к квазитреугольному виду

$$B = \left\| \begin{matrix} B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1r} \\ 0 & B_{22} & \ldots & B_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & B_{rr} \end{matrix} \right\|,$$

где $(B_{ii}-\lambda_i I)^{a_i}=0$, а V определено с точностью до множителя $U=\text{диаг}[U_1, U_2, \ldots, U_\gamma]$, U_i — произвольная унитарная матрица порядка a_i. Этот множитель используется для дальнейшего приведения к канонической форме матриц B_{ii}, причем сначала рассматривается тот случай, когда каноническая форма матрицы B_{ii} полностью определяет унитарные матрицы U_i. Вопрос сводится к определению канонической формы матрицы A, удовлетворяющей условию $A^a=0$ при некотором неотрицательном a. Оказывается, что в этом случае каноническая форма матрицы A имеет вид

$$\begin{Vmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & \ldots & A_{1r} \\ 0 & 0 & A_{23} & \ldots & A_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix},$$

где A_{pq}, $p<q$,— матрицы специального вида, порядки которых определяются порядками элементарных делителей матрицы A.

В случае же матриц B_{ii}, не полностью определяющих своей канонической формой матрицы U_i, оставшийся произвол используется для приведения к треугольному виду некоторых квадратных матриц, содержащихся в матрицах B_{pq}, $p<q$.

Изложенный метод иллюстрируется на примере матрицы восьмого порядка. *М. А. Наймарк*

3619. Пары нормальных матриц, обладающих свойством *L*. Видандт (Pairs of normal matrices with property *L*. Wielandt Helmut), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1953, **51**, № 2, 89—90 (англ.)

Доказывается теорема:

Пусть комплексные числа $z=z_\lambda$ ($\lambda=1, 2, \ldots, \iota$) являются вершинами многоугольника, содержащего внутри себя точку $z=0$. Пусть, далее, собственные числа α_k и β_k нормальных $n\times n$ матриц A и B могут быть перенумерованы таким образом, что собственные числа $\gamma_k(z)$ матрицы $A+zB$ удовлетворяют неравенству

$$\sum_{k=1}^{n}|\gamma_k(z)|^2\geqslant\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k+z\beta_k|^2. \qquad (1)$$

Тогда $AB=BA$.

Это предложение обобщает теорему Вигмана (РЖМат, 1953, 585). Приведен пример такой пары нормальных матриц A и B, что $AB\neq BA$, хотя неравенство (1) выполняется для всех точек z полуплоскости, содержащей на своей границе точку $z=0$. *Н. В. Азбелев*

3620. Асимптотическое поведение степеней матриц. II. Гаучи (The asymptotic behaviour of powers of matrices. II. Gautschi Werner), Duke Math. J., 1953, **20**, № 3, 375—379 (англ.)

Статья является добавлением к работе того же автора (РЖМат, 1953, 588). Взамен принятого в основной работе определения нормы матрицы

$$N(A)=\left[\sum_{\mu,\nu}|a_{\mu\nu}|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

рассматриваются нормы более общего вида.

Доказывается (обозначения см. в упомянутом реферате):

1) Если $N(A)$ удовлетворяет условиям:

$$N(A)>0 \text{ при } A\neq 0;\ N(\lambda A)=|\lambda|N(A);$$
$$N(A+B)\leqslant N(A)+N(B),$$

то для натуральных p

$$N(A^p)\leqslant cp^{k-1}\left[\sum_1^n|\lambda_\nu|^{2p}\right]^{\frac{1}{2}},$$

где c зависит только от A и выбора нормы N.

2) Пусть

$$N(A)=\sup_{x\neq 0}\frac{\varphi(Ax)}{\psi(x)},$$

где φ и ψ — нормы векторов n-мерного комплексного евклидова пространства, удовлетворяющие, кроме указанных в 1) соотношений для N, еще требованиям

$$\varphi(x)\leqslant C;\ \psi(x)\geqslant c>0 \text{ при } |x|=1.$$

Тогда при $p\to\infty$

$$[N(A^p)]^{\frac{1}{p}}\to\max_\nu|\lambda_\nu|=\omega_A.$$

Если $\varphi=\psi$, то $[N(A^p)]^{\frac{1}{p}}\geqslant\omega_A$ и $[N(A^p)]^{\frac{1}{p}}$ стремится монотонно к ω_A для всякой последовательности p_ν, для которой p_ν кратно $p_{\nu-1}$.

3) Если

$$N(A)=\left[\sum_{\mu,\nu}|a_{\mu\nu}|^r\right]^{\frac{1}{r}};\ r\geqslant 1,$$

то

$[N(A^p)]^{\frac{1}{p}}\to\omega_A$ при $p\to\infty$. *Д. М. Котелянский*

3621. Проблема Гурвица и Ньюмана. Дьёдонне (A problem of Hurwitz and Newman. Dieudonné Jean), Duke Math. J., 1953, **20**, № 3, 381—389 (англ.)

Решается следующая проблема: пусть K — произвольное тело характеристики $\neq 2$; E — n-мерное правое векторное пространство над K; σ — автоморфизм тела K; γ — такой элемент из K, что $\gamma^\sigma=\gamma$ и $\xi^{\sigma^2}=\gamma^{-1}\xi\gamma$ для каждого $\xi\in K$. При этих условиях требуется определить максимальное число p полулинейных относительно автоморфизма σ преобразований u_k ($1\leqslant k\leqslant p$) пространства E, удовлетворяющих соотношениям

$$u_k^2(x)=x\gamma \text{ для каждого } x\in E \text{ и каждого } k,$$
$$u_ku_h=-u_hu_k \text{ для } k\neq h.$$

Частными случаями этой проблемы являются проблема Гурвица (K — поле действительных чисел, σ — тождественный автоморфизм и $\gamma=1$) и проблема Ньюмана, отличающаяся от проблемы Гурвица

тем, что в ней $\gamma = -1$. Решение сформулированной проблемы сводится к решению следующей задачи:

Пусть K — произвольное тело характеристики $\neq 2$, в центре которого содержится квадратный корень из -1; σ_1, σ_2 — автоморфизмы тела K; γ_1, γ_2 — такие элементы из K, что $\xi^{\sigma_1^2} = \gamma_1^{-1}\xi\gamma_1$, $\xi^{\sigma_2^2} = \gamma_2^{-1}\xi\gamma_2$ и $\gamma_1^{\sigma_1} = \gamma_1$, $\gamma_2^{\sigma_2} = \gamma_2$. Пусть также дан такой элемент $\delta \in K$, что $\xi^{\sigma_2\sigma_1} = \delta^{-1}\xi^{\sigma_1\sigma_2}\delta$, $\delta\delta^{\sigma_1} = (\gamma_1^{-1})^{\sigma_2}\gamma_1$ и $\delta^{\sigma_2}\delta = \gamma_2^{-1}\gamma_2^{\sigma_1}$. Для данного числа n требуется определить максимальное число p линейных преобразований u_k $(1 \leqslant k \leqslant p)$ n-мерного векторного пространства E над K, удовлетворяющих условиям:

1) $u_k^2 = -1$ для каждого k;

2) $u_k u_h = -u_h u_k$ для $k \neq h$;

3) существуют такие два полулинейных преобразования φ_1, φ_2 пространства E, соответственно относительно автоморфизмов σ_1 и σ_2, что $\varphi_1^2(x) = x\gamma_1$, $\varphi_2^2(x) = x\gamma_2$, $\varphi_1(\varphi_2(x)) = \varphi_2(\varphi_1(x))\delta$ и для каждого k

$$\varphi_1 u_k = \varepsilon_1 u_k \varphi_1,$$
$$\varphi_2 u_k = \varepsilon_2 u_k \varphi_2,$$

где ε_1 и ε_2 — два данных числа, каждое из которых равно 1 или -1. Эта задача имеет следующее решение: если $n = 2^r s$ (s — нечетное число), то $2r - 3 \leqslant p \leqslant 2r + 1$, причем автор указывает необходимые и достаточные условия, при которых $p = 2r + 1$. Отсюда следует, что число p в первой проблеме (при данном $n = 2^r s$) может изменяться в пределах $2r - 2 \leqslant p \leqslant 2r + 4$.

Кроме решения первой проблемы в общем виде, даются также ее решения в следующих частных случаях:

1) в центре тела K содержится квадратный корень из -1;

2) K — коммутативное поле, не содержащее квадратного корня из -1, σ — тождественный автоморфизм;

3) σ — тождественный автоморфизм и $\gamma = -1$ (проблема Ньюмана для произвольного тела K).

Е. Г. Шульгейфер

ГРУППЫ

3622. О группах автоморфизмов некоторых классов разрешимых групп. Чарин В. С. Украинский матем. ж., 1953, 5, № 4, 363—369

Следуя А. И. Мальцеву (Матем. сб., 1951, 28 (70), № 3, 567—588), автор называет разрешимую группу группой типа A_i $(i = 2, 3, 4)$, если она допускает конечный нормальный ряд, все факторы которого являются абелевыми A_i-группами. Абелева группа конечного ранга или A_2-группа называется: 1) A_3-группой, если периодическая часть ее разлагается в прямое произведение конечного числа циклических и квазициклических (типа p^∞) подгрупп; 2) A_4-группой, если периодическая часть ее конечна. Как обычно, группа называется полной, если из любого элемента ее извлекается корень любой степени.

Доказывается, что полная группа автоморфизмов разрешимой (нильпотентной) A_2-группы разрешима (нильпотентна). Полная группа автоморфизмов разрешимой A_3-группы является расширением полной абелевой группы (вообще говоря, бесконечного ранга) при помощи нильпотентной группы без кручения типа A_4. Полная группа автоморфизмов разрешимой A_4-группы является нильпотентной A_4-группой без кручения.

Д. М. Смирнов

3623. О системе симметрических операторов в группе. Нейман (A note on means in groups. Neumann B. H.), J. London Math. Soc., 1953, 28, ч. 4, № 112, 472—476 (англ.)

Последовательность функций $f_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $n = 1, 2, \ldots$, определенных на аддитивно записываемой группе G и принимающих значения из той же группы G, называется системой симметрических операторов в G, если удовлетворяются следующие условия:

1) $f_n(y + x_1, \ldots, y + x_n) = y + f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

2) $f_n(-x_1, -x_2 \ldots, -x_n) = -f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

3) f_n — симметрические функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

4) $f_{n+1}(f_n, f_n, \ldots, f_n, x_{n+1}) = f_{n+1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$.

Для того чтобы в группе G существовала система симметрических операторов, необходимо и достаточно, чтобы: А) для любого $g \in G$ и любого натурального n уравнение $nx = g$ имело единственное решение, которое обозначается $x = g/n$; В) $y + (-y + nz)/(n+1) = z + (-z + ny)/(n+1)$, для $n = 2, 3, \ldots$ и любых $y, z \in G$ (Scott W. R., Amer. J. Math., 1952, 74, 667—675).

В работе доказывается, что из выполнения условия А) для $n = 2$ и 3 и условия В) для $n = 2$ следует перестановочность в группе G сопряженных элементов; обратно, если выполняется условие А) и все сопряженные элементы перестановочны, то выполняется и условие В).

С. Л. Эдельман

3624. О теореме Блихфельдта. Ито (On a theorem of H. F. Blichfeldt. Itô Noboru), Nagoya Math. J., 1953, 5, 75—77 (англ.)

Пусть G — группа линейных преобразований n переменных конечного порядка g. Блихфельдт (Trans. Amer. Math. Soc., 1903, 4, 387—397) доказал: если g делится на простое число p, причем $p > (n-1)(2n+1)$, то G содержит инвариантную абелеву p-подгруппу.

Автор показывает, что если G разрешима, то это же будет верно для любого $p > n$, за исключением случая, когда $p = n + 1$ и n есть степень двойки.

Брауэр (R. Brauer)

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 9, 842.

3625. Конечные метабелевы группы и плоскости в Σ_{14}. Скотт (Finite metabelian groups and planes of Σ_{14}. Scott Leland L.), Duke Math. J., 1953, 20, № 3, 405—415 (англ.)

Пусть G — конечная группа, обладающая следующими свойствами: 1) все элементы группы G, кроме единицы, имеют порядок p; 2) коммутант совпадает с центром C; 3) G порождается шестью элементами

$U_1, \ldots, U_6$; 4) C порождается 15 элементами $C_{ij} = U_i^{-1} U_j^{-1} U_i U_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant 6$. Пусть, далее, S_5 — пятимерное проективное пространство над конечным полем $GF(p)$. Каждой точке $\xi = (x_1, \ldots, x_6) \in S_5$ отвечает множество элементов из G вида $g = c \prod_1^6 U_i^{\rho x_i}$, где $\rho \neq 0$, $c \in C$. Пусть S_{k-1}, $2 \leqslant k \leqslant 6$, — подпространство из S_5, а $\xi_1, \ldots, \xi_k$ — точки, на которые оно натянуто. Каждой точке ξ_s отвечает некоторый элемент $g_s \in G$. Образуем коммутаторы $g_s^{-1} g_t^{-1} g_s g_t = \prod_{i<j} C_{ij}^{a_{ij}}$, $s < t$, a_{ij} — функции от s, t. Каждому коммутатору поставим в соответствие точку

$$(a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16}, a_{23}, a_{24}, a_{25}, a_{26}, a_{34}, a_{35}, a_{36}, a_{45}, a_{46}, a_{56})$$

14-мерного проективного пространства Σ_{14}. Таким образом, каждое S_{k-1} отображается в систему $0{,}5\,k\,(k-1)$ точек из Σ_{14}, на которые можно натянуть подпространство $\Sigma_{0,5\,k\,(k-1)-1}$. Образы прямых из S_5 образуют в Σ_{14} 8-мерное многообразие V. Если подпространство Σ пространства Σ_{14} содержится в каком-либо Σ_5, оно называется Σ_5-пространством. Если $\Sigma \subset \Sigma_9$, но не является Σ_5-пространством, оно называется Σ_9-пространством. Если $\Sigma \not\subset \Sigma_9$, оно называется Σ_{14}-пространством. Подпространства Σ и Σ' из Σ_{14} считаются принадлежащими к одному типу, если одно из них переводится в другое при помощи коллинеации Σ_{14}, оставляющей на месте V. Ранее было доказано (Brahana H. R., Amer. J. Math., 1940, **62**, 365—379; 1951, **73**, 539—555), что существуют 4 различных типа Σ_5-прямых, 2—Σ_9-прямых, 8—Σ_{14}-прямых, 6—Σ_5-плоскостей, 16—Σ_9-плоскостей. Первые 7 типов прямых в указанной классификации состоят из точек, принадлежащих V или лежащих на прямых, соединяющих точки из V. В реферируемой статье рассматриваются Σ_{14}-плоскости, содержащие хотя бы одну точку из V и хотя бы одну прямую первых 7 типов. Получается 42 типа Σ_{14}-плоскостей. Автор указывает, что выделение дальнейших типов сопряжено с возрастающими трудностями. Теоретико-групповую интерпретацию полученных результатов предоставляется провести читателю, приняв за образец цитированные выше работы. *Л. А. Скорняков*

3626. О факторизации конечной абелевой группы. **Брёйн** (On the factorization of finite abelian groups. Bruijn N. G. de), Koninkl. nederl. akad. wetensch., Proc., 1953, **A56**, № 3, 258—264; Indagationes math., 1953, **15**, № 3, 258—264 (англ.)

Пусть G — конечная абелева группа, A и B — некоторые множества элементов группы G. Запись $AB = G$ означает, что каждый элемент $g \in G$ может быть единственным способом представлен в виде $g = ab (a \in A,\ b \in B)$. Представление $G = AB$ называется факторизацией G. Множество A элементов G называется периодическим, если существует отличный от единицы элемент $g \in G$, для которого $Ag = A$.

Группа G называется «хорошей» (good), если при каждой факторизации $G = AB$ по крайней мере один из факторов периодический. В противном случае группа называется «плохой» (bad). Существуют многочисленные примеры как «плохих», так и «хороших» групп (Hajós G., Časop. pěstov. mat., fys., 1950, **74**, 157—162; Acta math. Acad. sci. hung., 1950, **1**, 189—195; Rédei L., Acta math., 1947, **79**, 273—290; Acta math. Acad. sci. hung., 1950, **1**, 197—207).

Автор устанавливает новые категории «хороших» и «плохих» групп и, основываясь на полученных им результатах, доказывает общую теорему:

Если группа G имеет «плохую» подгруппу H, то сама группа G «плохая». *П. Е. Дюбюк*

3627. О факторизации циклических групп. **Брёйн** (On the factorization of cyclic groups. Bruijn N. G. de), Koninkl. nederl. akad. wetensch., Proc., 1953, **A56**, № 4, 370—377; Indagationes math., 1953, **15**, № 4, 370—377 (англ.)

Представление $G = AB$, где G — циклическая группа, A и B — ее подмножества, называется факторизацией для G, если каждый элемент $g \in G$ однозначно представим в виде $g = ab$; $a \in A$, $b \in B$. Множитель A называется периодическим, если $Ag = A$ для некоторого $g \in G$, $g \neq 1$. Факторизация с периодическим множителем называется тривиальной. Циклическая группа, все факторизации которой тривиальны, называется «хорошей». G — «плохая» группа, если она обладает нетривиальной факторизацией.

Хайош (Hajós G., Acta maht. Acad. sci. hung., 1950, **1**, 189—195) установил существование «плохих» циклических групп и указал метод построения нетривиальных факторизаций. Этим же методом автор в другой работе (см. реф. 3626) доказал, что «плохими» будут циклические группы порядков $n = d_1 d_2 d_3$, где $(d_1, d_2) = 1$, $d_3 > 1$, d_1 и d_2 — составные числа. Редеи (Redéi L., Acta math. Acad sci. hung., 1950, **1**, 197—207) доказал, что «хорошими» будут циклические группы порядков p^λ, pq, pqr (p, q, r — различные простые множители). В реферируемой работе доказывается, что циклическая группа порядка $p^\lambda q$, $\lambda \geqslant 1$, будет «хорошей». Остается еще невыясненным вопрос о циклических группах порядков $p^2 q$, $p^2 qr$, $pqrs$.

Исследование проводится методом Редеи. Каждой факторизации $G = AB$ циклической группы $G = \{g\}$ порядка n сопоставляется сравнение в кольце целочисленных многочленов:

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} \equiv A(x) B(x) \pmod{x^n - 1},$$
$$A(x) = \Sigma x^k,\ 0 \leqslant k < n,\ g^k \in A.$$

Аналогично для $B(x)$ и B. Существенно, чтобы коэффициенты $A(x)$ и $B(x)$ были неотрицательны. Доказываются некоторые свойства таких разложений. Из них приведем теорему 5:

Пусть n разлагается в произведение различных простых множителей. $A(x)$, $B(x)$ — целочисленные многочлены. Пусть

$$A(x) B(x) \equiv 1 + x + \ldots + x^{n-1} \pmod{x^n - 1},$$
$$B(1) > 1,\ F_n(x) \mid B(x),$$

где

$$F_n(x) = \prod_{d/n} (1 - x^{n/d})^{\mu(d)}$$

— многочлен деления окружности. Тогда существует простой множитель p/n такой, что $B(x) = B_0(x) + \ldots$

$\ldots + B_{p-1}(x)$, где $B_j^*(x)$ — целочисленные многочлены ($j = 0, 1, \ldots, p-1$) и

$$A(x)B_j(x) \equiv x^{nj/p} A(x) B_0(x) \pmod{x^n - 1}.$$

Из приведенной теоремы делается вывод о квазипериодичности всякой факторизации циклической группы с порядком, свободным от квадратов (факторизация $G = AB$ называется квазипериодической, если один из сомножителей, например B, представим в виде теоретико-множественной суммы $B = B_1 + B_2 + \ldots + B_m$ ($m > 1$) и $AB_j = g_j AB_1$; $j = 1, 2, \ldots, m$; причем $g_1, \ldots, g_m$ составляют подгруппу). *П. Г. Конторович*

3628. Обобщение одной теоремы Глисона. Ямабе (A generalization of a theorem of Gleason. Yamabe Hidehiko), Ann. Math., 1953, 58, № 2, 351—365 (англ.)

Доказывается, что любая локально компактная группа есть обобщенная группа Ли, а если она не имеет малых подгрупп (или малых нормальных делителей), то она является группой Ли. Ранее это предложение было доказано Глисоном для конечномерных групп. *М. М. Постников*

3629. О группах Ли с тремя параметрами. Добреску (Asupra grupurilor lui Lie cu trei parametri. Dobrescu Andrei), Bul. Ştiinţ. Acad. R. P. Române; Sec. mat. şi fiz., 1953, 5, № 1, 75—81 (рум.; резюме русск., франц.)

Устанавливается эквивалентность классификаций вещественных алгебр Ли третьего порядка, данных Бианки (Bianchi L., Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finiti di trasformazioni, Pisa, 1918, 550—557), Врэнчяну (Vrănceani G., Leçons de géométrie différentielle. Bucarest, 1947, 106—111) и Ли (Lee H. C., J. math. pures et appl., 1947, 26, 251), и указываются соответствующие формулы перехода. Приводится таблица, устанавливающая соответствие отдельных типов указанных классификаций для различных значений определяющего тип параметра. *В. В. Морозов*

3630. О симметрических обобщенных группах. Либер А. Е., Матем. сб., 1953, 33(75), № 3, 531—544

Пусть $\mathfrak{G}$ есть некоторая полугруппа (множество с одним однозначным ассоциативным действием умножения), ε — некоторое отношение эквивалентности в $\mathfrak{G}$. ε называется стабильным отношением, если из $g \equiv h \pmod{\varepsilon}$, где $g, h \in \mathfrak{G}$, при любом $x \in \mathfrak{G}$ имеет место $xg \equiv xh \pmod{\varepsilon}$, $gx \equiv hx \pmod{\varepsilon}$. Пусть φ есть гомоморфизм полугруппы. Будем считать эквивалентными такие элементы $g, h \in \mathfrak{G}$, для которых $\varphi(g) = \varphi(h)$. Такое отношение эквивалентности стабильно. При этом всякое стабильное отношение эквивалентности может быть получено таким способом из некоторого гомоморфизма. Описание всех стабильных отношений эквивалентности равносильно описанию, с точностью до изоморфизма, всех гомоморфизмов полугруппы.

Пусть A есть произвольное множество, а p_f и q_f — некоторые два его равномощных подмножества. Взаимно однозначное отображение p_f на q_f называется частичным преобразованием A. Относительно умножения (т. е. последовательного применения) множество всех частичных преобразований A является полугруппой (и даже так называемой обобщенной группой). Эта полугруппа S_A названа автором симметрической обобщенной группой.

Автор дает новую алгебраическую характеристику симметрических обобщенных полугрупп и приводит новое доказательство того, что все автоморфизмы симметрической обобщенной группы внутренние.

Для $f \in S_A$ мощность p_f (равная мощности q_f) называется рангом f. Пусть n есть заданное кардинальное число; совокупность J_n всех $f \in S_A$, для которых ранг $f < n$, является идеалом. Других идеалов S_A не имеет.

Пусть ε есть произвольное стабильное отношение эквивалентности в S_A. Класс всех элементов из S_A, эквивалентных с нулевым элементом σ (т. е. с частичным преобразованием, у которого p_σ и q_σ пусты), образует идеал J_n. Если n есть целое положительное число, то ε определяется следующим образом: $g \equiv h \pmod{\varepsilon}$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из трех условий:

a) $g = h$, *b*) ранг $g < n$, ранг $h < n$,
c) ранг g=ранг $h = n$, $p_g = p_h$, $q_g = q_h$, $[h^{-1}g] \in \mathfrak{N}_n$,

где $\mathfrak{N}_n$ есть некоторый фиксированный нормальный делитель симметрической группы подстановок чисел $1, 2, \ldots, n$, $[h^{-1}g]$ — элемент указанной группы, индуцированный очевидным образом преобразованием $(h^{-1}g)$. Таким образом, в случае конечного A дается описание всех стабильных отношений эквивалентности в S_A. В случае бесконечного A автор строит такую совокупность B стабильных отношений эквивалентности, называемую им базисом, что для любого ε можно указать такое $B' \subset B$, что $g \equiv h \pmod{\varepsilon}$ имеет место тогда и только тогда, когда выполнено одновременно для всех $\varepsilon_\nu \in B'$ условие

$$g \equiv h \pmod{\varepsilon_\nu}.$$

Е. С. Ляпин

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

3631. Две редукционные теоремы в проблеме погружаемости для абелевых алгебр. Кохендёрфер (Zwei Reduktionssätze zum Einbettungsproblem für Abelsche Algebren. Kochendörffer Rudolf), Math. Nachr., 1953, 10, № 1—2, 75—84 (нем.)

Исследуется проблема погружаемости поля Ω нормального над Ω_0 и с группой Галуа $\mathfrak{g}$ в алгебру Галуа K с группой $\mathfrak{G}$ над Ω_0, являющейся расширением абелевой группы $\mathfrak{A}$ посредством $\mathfrak{g}$. Устанавливается, что в этой проблеме достаточно ограничиться p-группами $\mathfrak{A}$.

Доказывается теорема:

Пусть $\mathfrak{S}$ ($\supset \mathfrak{A}$) есть подгруппа $\mathfrak{G}$, индекс которой взаимно прост с порядком $\mathfrak{A}$; Σ — подполе Ω, принадлежащее подгруппе $\mathfrak{S}/\mathfrak{A}$ группы $\mathfrak{g}$. Тогда, если среди алгебр Галуа над Ω существуют имеющие над Σ группу $\mathfrak{S}$, то среди них существуют и имеющие над Ω_0 группу $\mathfrak{G}$.

Эта теорема сводит проблему погружаемости к проблеме для p-группы $\mathfrak{G}$. Если $\mathfrak{A}$ есть p-группа, достаточно взять в качестве $\mathfrak{S}$ силовскую подгруппу группы $\mathfrak{G}$. *Д. К. Фаддеев*

3632. Ранг коммутативности. Левицкий (On the rank of commutativity. Levitzki Jakob), Riveon lematematika, 1953, **6**, 1—14 (иврит; резюме англ.)

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — элементы кольца S; положим

$$[a_1, \ldots, a_k] = \Sigma \pm a_{i_1} \ldots a_{i_k},$$

где сумма распространена на все $k!$ перестановок индексов $1, 2, \ldots, k$ с обычным правилом знаков. Наименьшее k, для которого $[a_1, \ldots, a_k] = 0$ тождественно на S, обозначается через $d(S)$ и называется рангом коммутативности. Это понятие было введено Леви (Levi F. W., J. Indian Math. Soc. (N. S.), 1947, **11**, 85—88).

Теорема 1. Если A — алгебра ранга m над полем K, то $d(A) \leqslant m + 1$.

Теорема 3. Если N — радикал в A и $i(N)$ — его индекс нильпотентности, то $d(A) \leqslant d(A/N) \cdot i(N)$ (если $A = N$, то считаем $d(A/N) = 1$).

Теорема 5. Если A есть прямая сумма идеалов A_i, то $d(A) = \max\{d(A_i)\}$.

Теорема 6. Для алгебры A всех $n \times n$ матриц над некоторым полем $d(A) = 2n$. Этот результат (основной в работе) другим способом был доказан Амицуром (Amitsur) и автором (Proc. Amer. Math. Soc., 1950, **1**, 449—463). *Коэн (I. S. Cohen)*

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 9, 840.

3633. Коммутаторы в ассоциативных кольцах. Дрейзин, Грунберг (Commutators in associative rings. Drazin M. P., Gruenberg K. W.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, **49**, ч. 4, 590—594 (англ.)

Нижним центральным рядом ассоциативного кольца R называется ряд $R = R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq \ldots$, где R_{k+1} есть наименьший идеал кольца R, содержащий все коммутаторы $[a, b] = ab - ba$, $a \in R_k$, $b \in R$. Говорят, что кольцо R имеет конечный класс, если $R_n = 0$ для некоторого натурального n.

Любое подмножество X кольца R порождает лиево кольцо $[X]$ с тем же сложением и новым умножением: $[a, b] = ab - ba$. Для случая, когда X есть множество образующих, авторы доказывают, что из нильпотентности колец R_1 и $[X]$ следует конечность класса кольца R. Для алгебраического кольца характеристики нуль с конечным числом образующих то же самое следует только из нильпотентности $[X]$.

Эти результаты переносятся на кольца с коммутативными кольцами в качестве областей операторов и, в частности, на алгебры.

Приводятся примеры кольца с двумя образующими, для которого $[X]$ нильпотентно, но которое не является кольцом конечного класса, а также алгебры конечного ранга над полем характеристики p с аналогичными свойствами. *А. И. Ширшов*

3634. Заметка об автоморфизмах лиевой k-системы. Голдхабер (A note on Lie k system automorphisms. Goldhaber J. K.), Amer. J. Math., 1953, **75**, № 4, 899—863 (англ.)

В заметке следующим образом определяется автоморфизм лиевой k-системы.

Пусть $\mathfrak{L}$ — алгебра Ли над полем $\mathfrak{F}$. Взаимно однозначное линейное отображение ψ алгебры $\mathfrak{L}$ на себя называется автоморфизмом лиевой k-системы, если для любых $A_i \in \mathfrak{L}$ выполняется равенство

$$[[A_1 A_2] A_3] \cdots A_k]^\psi = [[A_1^\psi A_2^\psi] A_3^\psi] \cdots A_k^\psi].$$

Доказаны следующие две теоремы:

1. Пусть $\mathfrak{L}$ — простое кольцо Ли и $[\mathfrak{L}, \mathfrak{L}] \neq 0$. Если ψ — автоморфизм лиевой k-системы кольца $\mathfrak{L}$, то $\psi = \lambda\Phi$, где Φ — автоморфизм $\mathfrak{L}$, а λ — корень степени $k-1$ из единицы (по определению $A^{\lambda\Phi} = \lambda A^\Phi$ для $A \in \mathfrak{L}$).

2. Пусть $\mathfrak{S}$ — полупростая сепарабельная алгебра над произвольным полем $\mathfrak{F}$ характеристики p. Рассмотрим произвольный автоморфизм лиевой k-системы алгебры $\mathfrak{S}$. Для любой простой компоненты $\mathfrak{A}$ алгебры $\mathfrak{S}$ найдется изоморфная ей простая компонента $\mathfrak{B}$ такая, что на $\mathfrak{A}$ рассматриваемый автоморфизм имеет один из следующих двух видов:

1) $A \to \lambda[B + (r \text{ след } B) I] + (\text{след } B) Z$,

2) $A \to \lambda[-B' + (r \text{ след } B') I] + (\text{след } B') Z$,

$$r = 0, 1, \ldots, p-1;$$

где $A \to B$ (B') — изоморфизм (антиизоморфизм) $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$; λ — корень степени $k-1$ из единицы; Z — элемент из центра $\mathfrak{S} - \mathfrak{B}$.

В заметке указано, что приведенные теоремы являются обобщениями двух известных теорем (Jacobson N., Rickart C. E., Trans. Amer. Math. Soc., 1950, **69**, 479—502; Jacobson N., Amer. J. Math., 1941, **63**, 481—515). *Г. И. Кац*

3635. Интегрально и локально инволютивные нормальности. Барбилян (Normalităţi involutive locale resp. globale. Barbilian D.), Studii şi cercetări mat., 1953, **4**, № 1—2, 29—67 (рум.; резюме русск., франц.)

Некоторое множество интервалов (A/B) структуры S называется нормальностью ANB. Если уплотнения SKZ (Шрейера—Куроша—Цассенхауза) двух произвольных нормальных систем остаются нормальными, то нормальность называется локально инволютивной. Если уплотнения SKZ двух возрастающих или убывающих нормальных рядов остаются нормальными, то нормальность называется интегрально инволютивной (соответственно по возрастанию или убыванию). Эти нормальности снабжаются соотношением, называемым добавочной функцией Гёльдера, инвариантным относительно преобразования Цассенхауза.

Вводятся следующие аксиомы:

O. Если ANB, то $A, B \in \sigma^\frown$, где $\sigma^\frown$ является основной полуструктурой.

UK (Узкова — Коржинека). Если $A_1, A_2 \in \sigma^\frown$, то найдутся такие элементы $B_i \leqslant A_1 \cap A_2$, что $A_i N B_i$, $i = 1, 2$.

Нормальность называется унитарной, если она, кроме O, удовлетворяет следующим условиям:

1) если ANB, $C \in \sigma^*$, то $(C \cap A)\, N\, (C \cap B)$;
2) если ANB, DNC, $D \geqslant A$, то $(C \cup A)\, N\, (C \cup B)$.

Доказывается, что унитарная нормальность является локально инволютивной и что она единственна при условиях O и UK. Вводится понятие собственной функции Гёльдера, присоединенной к унитарной нормальности. Сопряженные частные уплотнений SKZ двух унитарно нормальных рядов связаны любой собственной функцией Гёльдера, присоединенной к нормальности. Приводится семь примеров функций Гёльдера, одна из которых изучается более подробно.

В структуре S с единицей 1 достижимым называется элемент, связанный с 1 возрастающим сильно нормальным рядом. F-нормальностью называется нормальность, удовлетворяющая следующим условиям:

1) если ANB, ANC, то $BN\,(B \cap C)$;
2) если DNC, ANB, $D \geqslant A$, то $(C \cup A)\, N\, (C \cup B)$;
3) если ANB, ANC, то $AN\,(B \cup C)$;
4) все первые члены соотношений нормальности, фигурирующие в условиях 1) — 3), достижимы.

F-нормальность не может быть локально инволютивной, является инволютивной и тем самым интегрально инволютивной (по возрастанию).

Рассматриваются также F- и F^*-нормальности, интегрально инволютивные по убыванию. Для F^*-нормальности доказывается лемма Цассенхауза.

А. Х. Лившиц

См. также: 3555, 3594, 3608, 3610, 3613, 3648, 3653 К, 3658, 3685, 3686, 3706, 3715, 3743, 3760, 3762, 3837, 3838, 3839, 3840, 3843, 3857, 3858, 3859, 3860, 3861, 3862, 3876

ТОПОЛОГИЯ

3636. Равномерная топология в пространстве отображений. Крейн С. Г., Матем. сб., 1953, **33**, № 3, 627—638

В множестве $M(X, Y)$ всех отображений абстрактного множества X в бикомпакт Y определяется топология при помощи следующей системы окрестностей: за α-окрестность отображения $\varphi_0 \in M(X, Y)$ (где $\alpha = \{U_1, \ldots, U_k\}$ — произвольное открытое покрытие бикомпакта Y) принимается множество $\mathfrak{U}_\alpha(\varphi_0)$ всех таких отображений φ, для каждого из которых

$$X = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant k} \varphi^{-1}(U_i) \cap \varphi_0^{-1}(U_i).$$

Доказывается, что относительно системы окрестностей $\mathfrak{U}_\alpha(\varphi)$ пространство $M(X, Y)$ является полным равномерным пространством в смысле А. Вейля. Для того чтобы семейство отображений $\{\varphi\}$ имело бикомпактное замыкание в равномерной топологии, необходимым и достаточным является следующее условие: для любого открытого покрытия α бикомпакта Y можно найти такое конечное покрытие $\{E_i\}$ множества X, что для всякого отображения φ семейства $\{\varphi\}$ система множеств $\varphi(E_i)$ вписана в α. Такие семейства отображений автор называет равноколеблющимися. Замыкания равноколеблющихся семейств отображений в равномерной и в слабой (тихоновской) топологиях множества $M(X, Y)$ совпадают. Множество $C(X, Y)$ всех непрерывных отображений топологического пространства X в бикомпакт Y замкнуто в равномерной топологии множества $M(X, Y)$, а потому само является полным равномерным пространством. В слабой топологии множества $M(X, Y)$ это не так. Для того чтобы точка прикосновения φ_0 семейства непрерывных отображений $\{\varphi\}$ пространства X в бикомпакт Y была непрерывным отображением, необходимым и достаточным является следующее условие: для любого открытого покрытия $\{U_1, \ldots, U_k\}$ бикомпакта Y существует такое открытое покрытие γ пространства X, что для каждого $\Gamma \in \gamma$ можно найти отображение φ_Γ из семейства $\{\varphi\}$, для которого

$$\Gamma \subset \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant k} \varphi_\Gamma^{-1}(U_i) \cap \varphi_0^{-1}(U_i).$$

Ю. М. Смирнов

3637. Равномерная размерность и теорема о произведении. Тулмин (Uniform dimension and the product theorem. Toulmin G. H.), Quart. J. Math., 1953, **4**, № 15, 198—203 (англ.)

Дается новое определение индуктивной размерности $\dim R$ топологических пространств, обладающей следующими свойствами:

а) если $R \subset R'$, то $\dim R \leqslant \dim R'$;

б) $\operatorname{ind} R \leqslant \dim R$, где $\operatorname{ind} R$ — обычная индуктивная размерность;

в) если R — метрическое пространство со счетной базой, то $\operatorname{ind} R = \dim R$;

г) для тихоновского произведения $X \times Y$ пространств X и Y имеем: $\dim X \times Y \leqslant \dim X + \dim Y$.

Определяется понятие размерности $\dim R \,/\, \{G\}$ множества $R \subset R'$ по данной системе $\{G\}$ открытых множеств пространства R': $\dim R \,/\, \{G\} = -1$ тогда и только тогда, когда R пусто; $\dim R \,/\, \{G\} \leqslant n$ тогда и только тогда, когда множества $R \cap G$ составляют базу множества R и для любого множества $G \in \{G\}$ имеем:

$$\dim \text{гр}_R (R \cap G) \,/\, \{G\} \leqslant n - 1.$$

Равномерная размерность $\dim R$ пространства R есть нижняя грань размерностей $\dim R \,/\, \{G\}$ по всем его базам $\{G\}$ открытых множеств.

Ю. М. Смирнов

3638. К теореме о вырезании отображений. Сакаи (On the map excision theorem. Sakai Shozo), Sci. Repts Tokyo Bunrika Daigaku, 1953, **A4**, № 98—103, 290—297 (англ.)

Автор следующим образом обобщает теорему Уоллеса (Duke Math. J., 1952, **19**, 177). Пусть X и Y — произвольные топологические пространства,

$A \subset X$ и $B \subset Y$ — такие замкнутые множества, что их границы гр A и гр B имеют окрестности с вполне нормальными замыканиями. Если при этом замкнутое непрерывное отображение f пространства X в Y, переводящее множество A в B, топологически отображает $X \setminus A$ на $Y \setminus B$, то соответствующий гомоморфизм f^* группы $H^p(Y, B)$ в группу $H^p(X, A)$ оказывается изоморфизмом на; здесь H^p есть группа ∇-гомологий по модулю B, соответственно A, которую можно брать как в смысле конечных покрытий (Э. Чех), так и в смысле Уоллеса — Спаньера. *Ю. М. Смирнов*

3639. Об изотопных вложениях множеств типа F_σ в E^n. Шарп (Strongly topological imbedding of F_σ-subsets of E_n. Sharp Henry Jr), Amer. J. Math., 1953, **75**, № 3, 557—564 (англ.)

Через M_n^k обозначается множество всех точек n-мерного евклидова пространства E^n, у которых не более k координат рациональны, через L_n^k — множество точек, у которых не менее k координат рациональны. Через S_n^j обозначаются j-мерные множества типа F_σ, лежащие в E^n. Ставится вопрос: при каких n, k, j всякое множество S_n^j изотопно в E^n подмножеству множества M_n^k? Известны были нетривиальные ответы на этот вопрос: положительный при $n=2$, $k=0$ и при $n=3$, $k=1$, $j=0$; отрицательный при $n=3$, $k=0$. Автор показывает, что ответ положителен при $n \geqslant 4$, $k=n-2$ и отрицателен во всех остальных до сих пор невыясненных случаях. Помимо примеров, основным результатом является следующая теорема:

Всякое множество типа F_σ в E^n, имеющее размерность $\leqslant n-2$, может быть изотопно отображено на некоторое подмножество множества M_n^{n-2}, причем для данного множества F_σ совокупность всех указанных изотопий образует всюду плотное G_δ-множество в множестве всех топологических отображений пространства E^n на себя.

В работе ставится следующая нерешенная проблема:

Существует ли при $n \geqslant 3$, $k < n-2$ такое k-мерное множество в E^n, подмножеству которого был бы изотопен в E^n всякий лежащий в E^n компакт размерности k? Изотопия все время понимается в урысоновском смысле: топологическое отображение всего пространства на себя, переводящее одно данное множество в другое. *П. С. Александров*

3640. Решение одной проблемы Сикорского. Киносита (A solution of a problem of R. Sikorski. Kinoshita Shin'ichi), Fundam. math., 1953, **40**, 39—41 (англ.)

Автор дает пример двух таких компактных нульмерных множеств A и B, что 1) A не гомеоморфно B; 2) A гомеоморфно открытому подмножеству множества B, а B гомеоморфно открытому подмножеству множества A. Этот пример дает решение проблемы, поставленной референтом (Colloquium math., 1947—1948, **1**, 242), и является видоизменением аналогичного примера компактных одномерных множеств, построенного Куратовским (Fundam. math., 1950, **37**, 213—216).

Классы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ открыто-замкнутых подмножеств множеств A и B дают пример двух таких булевых тел, что: 1) $\mathfrak{A}$ не изоморфно $\mathfrak{B}$; 2) $\mathfrak{A}$ изоморфно некоторому главному идеалу тела $\mathfrak{B}$, а $\mathfrak{B}$ изоморфно некоторому главному идеалу тела $\mathfrak{A}$. *R. Sikorski*

3641. Аффинная структура в трехмерных многообразиях. VI. Компактные пространства, покрываемые двумя евклидовыми окрестностями. Мойс (Affine structures in 3-manifolds. VI. Compact spaces covered by two euclidean neighborhoods. Moise Edwin E.), Ann. Math., 1953, **58**, № 1, 107 (англ.)

Доказывается следующая теорема.

Пусть M — компактное метрическое пространство, являющееся суммой двух открытых множеств U и V, каждое из которых гомеоморфно трехмерному евклидову пространству. Тогда M гомеоморфно трехмерной сфере. *Р. В. Гамкрелидзе*

3642. О третьей симметрической степени окружности. Ботт (On the third symmetric potency of S_1. Bott R.), Fundam. math., 1952, **39**, 264—268 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Пусть M — произвольное метрическое пространство. Через M^n обозначается n-я симметрическая степень пространства M, т. е. пространство, точками которого являются все подмножества пространства M, имеющие мощность n. Расстояние в M^n определяется известной формулой Хаусдорфа. Референтом было показано (Fundam. math., 1949, **36**, 236—244), что третья симметрическая степень S_1^3 окружности S_1 является трехмерным многообразием, которое получается из двух полных торов при отождествлении их границ. Однако отождествление границ этих торов, данное в упомянутой работе, содержало ошибку и приводило к ошибочному выводу, что пространство S_1^3 гомеоморфно прямому произведению окружности S_1 и двумерной сферы S_2. Автор исправляет эту ошибку, показывая, что третья симметрическая степень окружности гомеоморфна трехмерной сфере. Кроме того, дается новое более простое доказательство возможности разложения пространства S_1^3 на сумму двух торов с общей границей. *K. Borsuk*

3643. Определение максимального числа областей соседства на неориентируемых поверхностях. Рингель (Bestimmung der Maximalzahl der Nachbargebiete auf nichtorientierbaren Flächen. Ringel Gerhard), Arch. Math., 1953, **4**, № 2, 137—142 (нем.)

Пусть F_q — замкнутая неориентируемая поверхность, порядок связности которой равен q. Через ν_q обозначается максимальное число областей соседства поверхности F_q, т. е. наибольшее из всех чисел ν, для которых существует разбиение поверхности F_q на ν многоугольных областей, попарно имеющих хотя бы одно общее ребро. Через χ_q обозначается наименьшее число цветов, необходимое для воз-

можности раскрашивания любой «карты», заданной на поверхности F_q. Хевудом было показано (Heawood P. J., Quart. J. Pure and Appl. Math., 1890, 24,332—338), что имеет место неравенство

$$\nu_q \leqslant \chi_q \leqslant \left[\frac{7+\sqrt{1+24q}}{2}\right]. \qquad (1)$$

В реферируемой работе доказывается, что при $q \geqslant 4$ оба знака неравенства в (1) заменяются знаками равенства. *В. Г. Болтянский*

3644. Об универсальном накрывающем пространстве и фундаментальной группе. Салфранк (On the universal covering space and the fundamental group. Saalfrank C. W.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 4, 650—653 (англ.)

В работе приведены следующие результаты (доказательство которых вполне автоматично). Пусть X и $A \subset X$ — линейно связные хаусдорфовы пространства, X^* и A^* — их универсальные накрывающие пространства, а $\pi_1(X)$ и $\pi_1(A)$ — фундаментальные группы. Предположим еще, что A есть ретракт пространства X. Тогда A^* естественным образом гомеоморфно некоторому подпространству $B^* \subset X^*$, причем B^* есть ретракт пространства X^*. Группа $\pi_1(A) \subset \pi_1(X)$ является ретрактом группы $\pi_1(X)$, т. е. существует гомоморфное отображение группы $\pi_1(X)$ в $\pi_1(A)$, являющееся на $\pi_1(A)$ тождественным. *В. Г. Болтянский*

3645. Группа нуль-путей и ее обобщения. Баум (Die Nullwegegruppe und ihre Verallgemeinerungen. Baum Walter), Compositio math., 1953, **11**, № 2, 83—118 (нем.)

Симплициальный сфероид (f, S^n) симплициального комплекса K называется нуль-сфероидом (нуль-путем при $n=1$), если на любом симплексе комплекса K степень отображения f равна нулю. Нуль-сфероид, являющийся разностью двух свободно гомотопных между собой сфероидов, называется специальным. Два нуль-сфероида называются нуль-гомотопными (в терминологии автора: ν-гомотопными), если они симплициально гомотопны в обычном смысле и все «промежуточные сфероиды» также являются нуль-сфероидами. Совокупность $\Psi^n(K)$ всех нуль-гомотопических классов n-мерных нуль-сфероидов естественным образом является группой (абелевой при $n>1$) и называется n-мерной группой нуль-сфероидов (нуль-путей при $n=1$) комплекса K. Аналогично определяется n-мерная группа $\Psi_0^n(K)$ специальных n-мерных нуль-сфероидов. Факторгруппа $\Omega^n(K) = \Psi^n(K) / \Psi_0^n(K)$ называется n-мерной группой приведенных нуль-сфероидов. Группы $\Psi^n(K)$, $\Psi_0^n(K)$ и $\Omega^n(K)$ топологически инвариантны и могут быть определены в терминах произвольных непрерывных сфероидов.

Обозначим через $\Gamma^n(K)$ подгруппу гомотопической группы $\Pi^n(K)$ порожденную гомологичными нулю сфероидами, через $\Pi_0^n(K)$ — подгруппу группы $\Pi^n(K)$, порожденную разностями свободно гомотопных между собой сфероидов, и через $P_0^n(K^n, K)$ — подгруппу группы $\Pi^n(K^n)$, порожденную разностями свободно гомотопных между собой в K^n сфероидов из K^n, гомотопных нулю в K. Оказывается, что имеют место следующие изоморфизмы:

$$\Psi^n(K) \approx \Gamma^n(K^n) / P_0^n(K^n, K);$$
$$\Psi_0^n(K) \approx \Pi_0^n(K^n) / P_0^n(K^n, K);$$
$$\Omega^n(K) \approx \Gamma^n(K^n) / \Pi_0^n(K^n).$$

В частности,

$$\Psi^n(K^n) \approx \Gamma^n(K^n);$$
$$\Psi_0^n(K^n) \approx \Pi_0^n(K^n);$$
$$\Omega^n(K) \approx \Omega^n(K^n).$$

Отсюда следует топологическая инвариантность указанных выше фактор-групп. Фактор-группа $\Gamma^n(K^n) / \Pi_0^n(K^n)$ рассматривалась Хопфом (Hopf H., Comment. math. helv., 1944, **17**, 307—326).

М. М. Постников

3646. ∇-гомологические соотношения в пространствах с топологической группой преобразований. Ху Сы-цзэнь (Cohomology relations in spaces with a topological transformation group. Hu Sze-Tsen), Nagoya Math. J., 1953, **5**, 113—125 (англ.)

Пусть Q — топологическая группа преобразований, действующая слева в пространстве X, B — ее пространство траекторий и $p: X \to B$ — естественная проекция. Для любой группы коэффициентов G автор строит некоторую группу $H_w^n(X, G)$ и включает гомоморфизм

$$p^+ : H^n(B, G) \to H^n(X, G)$$

(

групп ∇-гомологий Александера—Спаньера) в точную последовательность

$$\cdots \to H^n(B) \to H^n(X) \to H_w^n(X) \to H^{n+1}(B) \to \cdots$$

Для любой точки $x \in X$ строится, кроме того, гомоморфизм

$$k(x) : H_w^n(X, G) \to H^n(Q, G)$$

и доказывается, что если группа Q компактна, а точки x и x' принадлежат одному связному компактному множеству, то $k(x) = k(x')$.

Примечание референта. Автор не обратил внимания на то, что его группа $H_w^n(X)$ по существу совпадает с группой $H^{n+1}(C, X)$, где C — цилиндр отображения p. Если Ξ — траектория точки x, $\Pi: Q \to \Xi$ — отображение $q \to qx$, D — цилиндр отображения $\rho \mid \Xi$, $j: (D, \Xi) \to (C, X)$ — отображение вложения, то $\delta: H^n(\Xi) \approx H^{n+1}(D, \Xi)$ и построенный автором гомоморфизм $k(x)$ по существу совпадает с гомоморфизмом $\pi^+ \delta^{-1} j^+$.

Дугунджи (J. Dugundji)

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 6, 573—574.

3647. О характеристических классах комплексных пучков сфер и алгебраических многообразий. Чжэнь Шэн-шэнь (On the characteristic classes of complex sphere bundles and

algebraic varieties. Chern Shiing-Shen), Amer. J. Math., 1953, 75, № 3, 565—597 (англ.)

В начале статьи рассматривается теория гомологий в косых произведениях (B, X, F, p) в предположении, что база X и слой F являются конечными связными полиэдрами, а фундаментальная группа пространства X тривиально действует в группах гомологий слоев. Здесь автор в более привычном виде воспроизводит основные результаты теории Лере (РЖМат, 1953, 127). Так, например, его лемма 1.2 об изоморфизме групп $H^r(B_q, B_{q-1}; G)$ и $C^q(X; H^{r-q}(F, G))$, где $B_q = p^{-1}(X^q)$, а G—произвольная абелева группа, по существу совпадает с теоремой Лере (аналогичную трактовку теоремы Лере предложил Масси (РЖМат, 1954, 2909)). Пусть $l: F \to B$ — естественное отображение, а l^* — соответствующий гомоморфизм групп ∇-гомологий. Если для всех $r \geqslant 0$ существует такой гомоморфизм $\mu: H^r(F, G) \to H^r(B, G)$, что $l^*\mu = 1$, то слой F называется вполне негомологичным нулю (термин референта). Если G — поле и l^* есть гомоморфизм на, то гомоморфизм μ существует. Автор доказывает следующие теоремы:

Теорема 2. Если слой F вполне негомологичен нулю, то группа $H^r(B, G)$ изоморфна группе $H^r(X \times F, G)$, т. е. (теорема Кюннета) прямой сумме $\sum H^s(X; H^{r-s}(F, G))$. Автор указывает, что эта теорема была сформулирована Спаньером (Spanier E. H., Proc. Internat. Congress Math., vol. II, 1950, 390—396), а для случая, когда G — поле, она была ранее доказана Лере (Leray Y., J. math., 1950, 29, 169—213) и Хиршем (Hirsch, C. r. Acad. sci., 1949, 229, 1297—1299).

Теорема 1. Если слой F асферичен во всех размерностях, меньших r, и характеристический класс пучка (первое препятствие к распространению секущей поверхности) равен нулю, то гомоморфизм l^* отображает группу $H^r(B, H_r(F))$ на группу $H^r(F, H_r(F))$.

Пусть r — наивысшая размерность, в которой нетривиальны целочисленные группы гомологий слоя, и пусть

$$i^*: H^m(B; G) \to H^m(B_{m-r}; G),$$

$$j^*: H^m(B_{m-r}, B_{m-r-1}; G) \to H^m(B_{m-r}; G)$$

— естественные отображения, а $\lambda: H^m(B_{m-r}, B_{m-r-1}; G) \to C^{m-r}(X; H^r(F, G))$—указанный в лемме 1.2 изоморфизм. Легко видеть, что j^* есть отображение на, так что для любого элемента $u \in H^m(B, G)$ определена цепь $\lambda j^{*-1} i^* u \in C^{m-r}(X; H^r(F, G))$. Оказывается, что эта цепь является ∇-циклом, класс Ψu ∇-гомологий которого однозначно определяется элементом u. Элемент Ψu группы $H^{m-r}(X; H^r(F, G))$ называется интегралом от класса u по слою. Оказывается, что если слой F вполне негомологичен нулю, то Ψu есть компонента класса u в прямом слагаемом $H^{m-r}(X; H^r(F, G))$ (см. теорему 2). Автор доказывает, что если X и F являются ориентируемыми многообразиями, то гомоморфизм Ψ дуален (в смысле Пуанкаре) гомоморфизму групп Δ-гомологий, порожденному проекцией p.

Пусть B_1 и B_2 — два пучка комплексных векторных пространств размерностей ν_1 и ν_2 соответственно над одним и тем же базисным пространством X. Произведением $B_1 \boxtimes B_2$ пучков B_1 и B_2 называется пучок над X, слоем которого является $(\nu_1 + \nu_2)$-мерное пространство, натянутое на слои пучков B_1 и B_2. Автор доказывает следующую теорему двойственности для пучков комплексных векторных пространств: характеристический полином произведения пучков является произведением характеристических полиномов сомножителей (характеристическим полиномом пучка B комплексных векторных ν-мерных пространств называется полином $\sum_{i=0}^{\nu} C_i t^i$, где t — формальная переменная, а C_i есть i-й характеристический класс Черна (Чжэнь Шэншэнь)).

Пусть M — компактное комплексное многообразие комплексной размерности n и пусть $0 < r < n$. Рассмотрим присоединенные к касательному пучку многообразия M косые произведения B^*_{nr}, $\widetilde{B}_{nr}$, B_{nr}, слоями которых являются соответственно: многообразие аффинных r-реперов (комплексное многообразие Штифеля), многообразие последовательностей простых поливекторов вида $e_1, e_1 \wedge e_2, \ldots, e_1 \wedge \ldots \wedge e_r \neq 0$ и многообразие F_{nr} последовательностей вида $L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_{r-1}$, где L_k есть проективное k-мерное пространство (пространство направлений). Доказывается, что слой F_{nr} вполне негомологичен нулю. Пусть $p_{nr}: \widetilde{B}_{nr} \to B_{nr}, q_{nr}: B_{nr} \to M$ — естественные отображения (проекции). Слой косого произведения $p_{nr}: \widetilde{B}_{nr} \to B_{nr}$ является прямым произведением r комплексных прямых с выколотым нулем. Обозначив их характеристические классы через $v_1, \ldots, v_r$, положим $u_i = v_1 + \ldots + v_i$ $(i = 1, \ldots, r)$. Пусть C_i — характеристические классы Черна многообразия M (т. е. C_i есть характеристический класс косого произведения $B^*_{n, n-i+1}$). Автор доказывает следующую формулу Хирша и У (Wu Wen-Tsun):

$$u_1^n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} q_{n1}^*(C_i)\, u_1^{n-i}.$$

Группа $H^{r(2n-r-1)}(F_{nr}, G)$ для косого произведения B_{nr} изоморфна G, так что интеграл по слою оказывается гомоморфизмом

$$\Psi_{nr}: H^m(B_{nr}, G) \to H^{m-r(2n-r-1)}(M, G).$$

Автор доказывает, что

$$\Psi_{nr}(u_1^{n-2} \ldots u_{r-1}^{n-r} u_r^{2n-r}) = (-1)^n \overline{C}_{n-r+1},$$

где классы $\overline{C}_{n-r+1}$ определяются, как коэффициенты полинома $\overline{C}(t) = \sum_{i=1}^{n} \overline{C}_i t^i$, связанного с характеристическим полиномом $C(t)$ зависимостью $C(t)\,\overline{C}(t) = 1$. Эта формула, получаемая из теоремы

Хирша и У несложными алгебраическими рассуждениями, может служить новым определением характеристических классов.

Применяя полученные результаты к алгебраическим многообразиям, автор доказывает, что каждый характеристический класс гомологий алгебраического многообразия без особенностей содержит алгебраический цикл, т. е. целочисленную линейную комбинацию алгебраических подмногообразий. Прямое доказательство этого факта получено Р. В. Гамкрелидзе (РЖМат, 1954, 2061).

М. М. Постников

3648. Отождествления в теории сингулярных гомологий. Фейделл (Identifications in singular homology theory. Fadell Edward R.), Pacif. J. Math., 1953, 3, № 3, 529—549 (англ.)

Комплексом Майера называется такая последовательность $M = \{C_p, \partial_p\}$ групп C_p и гомоморфизмов $\partial_p : C_p \to C_{p-1}$, что $\partial_{p-1}\partial_p = 0$. Для комплексов Майера естественным образом определяются группы гомологий, подкомплексы и фактор-комплексы (последние состоят из групп C_p / C'_p, где C'_p — группы, составляющие некоторый подкомплекс). Подкомплекс M' комплекса M называется несущественным отождествителем, если естественная проекция комплекса M на фактор-комплекс M / M' порождает изоморфизм групп гомологий.

Автор изучает связи, имеющиеся между двумя следующими комплексами Майера, построенными для некоторого пространства X: сингулярным комплексом R в смысле Радо (Radó T., Pacif. J. Math., 1951, 1, 255—260) и сингулярным комплексом S в смысле Эйленберга (Eilenberg S., Ann. Math., 1944, 45, 407—447) Группами C_p^R комплекса R являются свободные абелевы группы, порожденные символами вида $(v_0, \ldots, v_p, T)^R$, где $v_0, \ldots, v_p$ — произвольные точки гильбертова пространства, а T — произвольное непрерывное отображение выпуклого замыкания этих точек в пространство X. Группами C_p^S комплекса S являются свободные абелевы группы, порожденные символами $(d_0, \ldots, d_p, T)^S$, где d_i есть единичная точка i-й координатной оси гильбертова пространства, а T имеет тот же смысл, что и выше. Положим

$$\sigma_p (v_0, \ldots, v_p, T)^R = (d_0, \ldots, d_p, T[v_0, \ldots, v_p])^S,$$

где $[v_0, \ldots, v_p]$ — линейное отображение выпуклого замыкания точек $d_0, \ldots, d_p$ на выпуклое замыкание точек $v_0, \ldots, v_p$, переводящее точку d_i в точку v_i $(i = 0, \ldots, p)$. Тогда мы получим цепное отображение σ: $R \to S$. Рассмотрим ядро N отображения $\sigma\beta^R$, где $\beta^R : R \to R$ — цепное отображение, порожденное операцией барицентрического подразделения. Подкомплекс N содержит все известные до сих пор несущественные отождествители комплекса R. Автор доказывает, что подкомплекс N также является несущественным отождествителем.

Операция барицентрического подразделения порождает, кроме того, цепное отображение $\beta^S : S \to S$. Автор доказывает, что ядро этого цепного отображения является несущественным отождествителем.

М. М. Постников

См. также: 3555, 3628, 3653 К, 3655 Д, 3708

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

3649. Краткое изложение основных свойств меры Лебега. Рисс (Court exposé des propriétés principales de la mesure de Lebesgue. Riesz M.), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1952, 25, 298—308 (журнал вышел из печати в 1953 г.)(франц.)

Излагается теория линейной меры Лебега с использованием внешней меры и без привлечения понятия внутренней меры. В изложении используются свойства симметрической разности $A_1 \Delta A_2 \Delta \ldots \Delta A_n$ множеств $A_1, \ldots, A_n$, обозначающей совокупность тех точек, которые принадлежат нечетному числу множеств A_k, не принадлежа прочим A_k.

П. И. Романовский

3650. Об измеримости функций нескольких переменных. Марчевский, Рылл-Нардзевский (Sur la mesurabilité des fonctions de plusieurs variables. Marczewski E., Ryll-Nardzewski C.), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1952, 25, 145—154 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.)

Рассматриваются функции $y = f(x, t)$, где $x \in X$, $t \in T$, $y \in Y$, причем X — абстрактное пространство, T — сепарабельное метрическое пространство, Y — метрическое пространство.

Пусть $\mathbf{K}$ — σ-тело множеств в X, $\mathbf{B}$ — борелевское тело в T, $\mathbf{M}$ — наименьшее σ-тело множеств в $X \times T$, содержащее все $A \times B$, $A \in \mathbf{K}$, $B \in \mathbf{B}$. Если $\varphi(t)$ — действительная функция на T, R — плотное счетное множество в T, $\varphi_R(t)$ и $\varphi^R(t)$ — грани $\varphi \mid R$ в точке $t \in T$, D_φ — множество точек разрыва $\varphi(t)$, то условие (P) означает, что D_φ первой категории; условие (R) означает, что $\varphi_R(t) \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi^R(t)$ при $t \in T$.

Доказываются предложения:

Если T является множеством действительных чисел, $f(x, t)$ $\mathbf{K}$-измерима по x и непрерывна справа по t, то $f(x, t)$ $\mathbf{M}$-измерима.

Если X — метрическое пространство, T — множество действительных чисел, $f(x, t)$ класса α по x и непрерывна справа по t, то $f(x, t)$ класса $\alpha + 1$.

Если X — метрическое пространство, Y — множество действительных чисел, $f(x, t)$ обладает свойством Бэра по x и удовлетворяет условиям (P) и (R) по t, то $f(x, t)$ обладает свойством Бэра.

Рассматриваются также некоторые другие свойства функции $f(x, t)$.

П. И. Романовский

3651. Сравнение новых определений полной вариации плоских отображений. Чеккони (Confronto fra recenti definizioni di variazione totale

per trasformazioni piane. Cecconi Jaurès), Boll. Unione mat. ital., 1953, сер. 3, 8, № 1, 10—19 (итал.)

Изучается вариация непрерывных отображений плоских областей, введенная Окамура (Okamura H., Mem. College Sci. Kyoto Imp. Univ., 1950, **A26**, 5—14).

Пусть Q — замкнутый единичный квадрат плоскости XOY и f — его непрерывное отражение в плоскость UOV. Пусть далее G — область, $G \subseteq Q$ и G^* — ее граница. Через $A(u, v, f, G)$ обозначается брауэровская степень отображения f относительно области G в точке (u, v); при этом $A(u, v, f, G) = 0$ в случае, когда $(u, v) \in f(G^*)$. Пусть, наконец, для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение τ квадрата Q на попарно непересекающиеся области G_i диаметров $< \varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ такое, что $Q \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (G_i \cup G_i^*)$ и $\operatorname{mes} \bigcup_{i=1}^{n} f(G_i^*) = 0$. Такие разбиения называются регулярными. Вариацией отображения f на квадрате Q по Окамура называется величина

$$\overline{W}(f, Q) = \sup_{\tau} \sum_{i=1}^{n} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(u, v, f, G_i)\, du\, dv \right|,$$

где верхняя грань берется по всевозможным регулярным разбиениям τ квадрата Q. Основной результат статьи состоит в том, что непрерывное отображение f, имеющее конечную вариацию $\overline{W}(f, Q)$, имеет и конечную вариацию в смысле Радо и Чезари (см., например, Rado T., Length and area, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **30**, N. Y., 1948), причем обе они совпадают. Приводится пример отображения, имеющего конечную вариацию в смысле Радо — Чезари и бесконечную в смысле Окамура; тем самым показано, что класс отображений с ограниченной вариацией по Окамура меньше класса отображений с ограниченной вариацией в смысле Радо—Чезари. Изучаются некоторые отображения с ограниченной вариацией.

Л. Д. Кудрявцев

3652. Определение и аналитическое выражение периметра множества. Де-Джорджи (Definizione ed espressione analitica del perimetro di un insieme. De Giorgi Ennio), Atti Accad. naz. Lincei Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **14**, № 3, 390—393 (итал.)

Периметр $P(E)$ борелевского множества E в r-мерном евклидовом пространстве S_r точек $x = (x_1, \ldots, x_r)$ определяется равенством

$$P(E) = \lim_{\lambda \to 0+} \int_{S_r} |\operatorname{grad} W_\lambda \varphi(x \mid E)|\, dx_1 \ldots dx_r,$$

где $\varphi(x \mid E)$ — характеристическая функция E и

$$W_\lambda \varphi(x \mid E) = \pi^{-r/2} \int_{S_r} e^{-|\xi|^2} \varphi(x + \lambda\xi \mid E)\, d\xi_1 \ldots d\xi_r.$$

Для многогранной области E $P(E)$ совпадает с мерой границы. В силу теорем 1 и 2 работы конечный периметр $P(E)$ равен полной вариации в S_r некоторой вполне аддитивной вектор-функции множества $F(B) = (F_1(B), \ldots, F_r(B))$, обладающей свойством:

$$\int_E \operatorname{grad} g(x)\, dx_1 \ldots dx_r = \int_{S_r} g(x)\, dF,$$

где $g(x)$ — любая непрерывная в S_r функция с непрерывным $\operatorname{grad} g$, причем g и $\operatorname{grad} g$ есть $O(|x|^{-r-1})$ при $|x| \to \infty$.

Отметим еще следующие теоремы:

Теорема 5. При $r \geqslant 2$ и конечном $P(E)$ выполняются неравенства:

$$mE \leqslant [P(E)]^{r/r-1},\ m(S_r \setminus E) \leqslant [P(E)]^{r/r-1}.$$

Теорема 6. Для многогранных областей π

$$P(E) = \lim_{\pi \to E} P(\pi),$$

где $\pi \to E$ означает, что $m[(\pi \cup E) \setminus (\pi \cap E)] \to 0$.

Доказательства теорем в работе не приводятся.

А. А. Конюшков

3653 К. Теория меры. Халмош П., 292 стр., Изд-во иностр. лит-ры, М., 1953, 16 р. 35 к.

Рассматривается большой круг вопросов, основанных на понятии меры. В первых семи главах излагаются в общем виде понятия меры и интеграла, в последующих пяти главах освещается применение понятия меры в теории динамических систем, теории функций, теории вероятностей, функциональном анализе и топологических группах.

Глава I. Множества и классы. Глава II. Меры и внешние меры. Глава III. Продолжение мер. Глава IV. Измеримые функции.

Глава V. Интегрирование. Понятие интеграла сначала вводится для простых функций, т. е. принимающих лишь конечное множество значений. Для интегралов от простых функций устанавливаются основные свойства интеграла. В общем случае функция $f(x)$ аппроксимируется определенным образом при помощи простых функций $f_n(x)$ и интеграл от нее определяется как $\lim_{n \to \infty} \int f_n(x)\, d\mu(x)$.

Глава VI. Общие функции множества. Вводится понятие обобщенной меры как вещественной счетно-аддитивной функции множества $\mu(E)$, определенной на некотором σ-кольце множеств (замкнутом относительно сложения счетной совокупности множеств) и способной принимать только одно из особых значений $-\infty$ или $+\infty$.

Показывается, что все пространство есть сумма двух подмножеств, на одном из которых мера положительна, а на другом отрицательна. Вводится понятие абсолютной непрерывности одной обобщенной меры относительно другой и доказывается теорема Радона — Никодима.

Глава VII. Произведения пространств. Определяются понятия произведения пространств и произведения мер. Устанавливается теорема Фубини, связывающая интеграл по произведению двух мер с «повторными» интегралами. Эти понятия обобщаются на случай многих, а также бесконечного числа сомножителей.

Глава VIII. Отображения и функции. Изучаются измеримые отображения одного простран-

ства с мерой в другое. Рассматривается булева алгебра, состоящая из классов измеримых множеств, отличающихся друг от друга лишь на множество меры нуль. При естественных ограничениях такая алгебра оказывается изоморфной алгебре измеримых по Лебегу множеств на отрезке [0,1]. Отметим, что автор не упоминает работ В. А. Рохлина, в которых указанные вопросы нашли наиболее полное разрешение.

Глава IX. Вероятность. Вероятность определяется как мера в пространстве элементарных событий. Определяется понятие независимости функций и устанавливается теорема Колмогорова об условиях сходимости почти всюду рядов независимых функций. Рассматриваются усиленный закон больших чисел и свойства условных вероятностей.

Глава X. Локально компактные пространства. Изучаются свойства мер по отношению к топологии пространства, в котором они определены. Рассматриваются меры, заданные на классе борелевских (или бэровских) множеств. Вводится понятие регулярности меры μ, состоящее в том, что для любого борелевского множества E

$$\mu(E) = \inf_{U \supset E} \mu(U) = \sup_{C \subset E} \mu(C),$$

где U — открытые, а C — компактные множества.

Исследуются свойства регулярных мер и дается способ их построения с помощью функций, заданных на компактных множествах. Существенная для приложений теорема Лузина о C-свойстве дана лишь в упражнениях. Дается теорема о представлении положительного функционала в пространстве непрерывных функций, равных нулю вне некоторого компактного множества.

Глава XI. Мера Хаара. Доказывается существование и единственность меры Хаара на локально компактных топологических группах.

Глава XII. Мера и топология в группах. Изучаются так называемые измеримые группы, т. е. группы, относительно которых предполагается лишь существование инвариантной меры, удовлетворяющей некоторым естественным условиям. В таких группах строится топология, так что после некоторого пополнения группа становится локально компактной. *Ю. А. Шрейдер*

3654 К. **Теория функций действительного переменного. Джефри** (The theory of functions of a real variable. Jeffery Ralph Lent, 2 nd ed. (Mathematical expositions series, № 6), XIII+ 232 pp., bibliog., University of Toronto P., Toronto, Oxford U. P., London, 1953, 48 s.), Brit. Nat. Bibliogr., 1953, № 201, 10 (библ.)

3655 Д. **О частично непрерывных функциях. Ариньш Э. И.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Н.-и. ин-т матем. и механики МГУ, М., 1953

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

3656. **О признаках вырождения для R-множеств. Ляпунов А. А.,** Изв. АН СССР, сер. матем., 1953, **17**, № 6, 565—578

Работа является непосредственным продолжением предыдущих работ автора (РЖМат, 1953, 632; 1954, 1598; Матем. сб., 1953, **32(74)**, 515—532). Во второй из указанных работ введено понятие R^α-операций и показано, что при помощи этих операций класс R-множеств естественным образом распадается на $\aleph_1$ классов. Многие свойства этих классов близки к аналогичным свойствам A- или CA-множеств.

В данной работе автор показывает, что R^α-операции и дополнительные к ним R^α_c-операции обладают жесткими базами, и устанавливает, что на операции с жесткими базами может быть перенесена значительная часть результатов теории плоских A-множеств при соответствующем изменении формулировок. Именно, вводя понятие точек N-однозначности для δs-операции Φ_N с жесткой базой N и понятие правильного отношения жесткой базы N и класса множеств Ξ, автор устанавливает для R^α-операций и BR_α-множеств аналог теоремы Н. Н. Лузина о проекции точек единственности плоских B-множеств и дает обобщение на этот случай критерия Н. Н. Лузина в теории B-множеств, согласно которому A-операция над B-множествами с непересекающимися слагаемыми всегда дает B-множество. Далее эти вопросы обобщаются на случай N-p-значности и N-конечнозначности точек таблицы BR_α-множеств по отношению к R^α-операции.

Кроме того, в работе установлен аналог теоремы В. И. Гливенко о покрытии униформного A-множества униформным B-множеством, а именно показано, что если $[N]$ есть жесткая база R^α-операции и $\mathcal{E} = \{E_{n_1 \ldots n_k}\}$ — таблица R_α-множеств ($R_{\alpha\beta}$-множеств) такая, что каждая точка множества $R_{[N]}(\{E_{n_1 \ldots n_k}\})$ есть точка $[N]$-однозначности таблицы $\mathcal{E}$, то существует таблица $\mathcal{E}' = \{H_{n_1 \ldots n_k}\}$ BR_α-множеств ($BR_{\alpha\beta}$-множеств) такая, что $H_{n_1 \ldots n_k} \supset E_{n_1 \ldots n_k}$, и каждая точка множества $R_{[N]}(\{H_{n_1 \ldots n_k}\})$ есть точка $[N]$-однозначности таблицы множеств $\mathcal{E}'$. *З. И. Козлова*

3657. **Обобщение теорем Мазуркевича и Бэйджмила. Серпинский** (Une généralisation des théorèmes de S. Mazurkiewicz et F. Bagemihl. Sierpiński W.), Fundam. math., 1953, **40**, 1—2 (франц.)

Доказывается методом трансфинитной индукции следующая теорема:

Для каждой функции, сопоставляющей прямой d, лежащей на плоскости, кардинальное число m_d такое, что $2 \leqslant m_d \leqslant 2^{\aleph_0}$, существует плоское множество S такое, что множество точек множества S, лежащих на прямой d, имеет мощность m_d.

Это есть обобщение теорем авторов, указанных в заглавии, из которых первый доказал эту теорему при условии $m_d = 2$ (Mazurkiewicz S., C. r. Soc. Sci. et Lettres de Varsovie, 1914, 382—383), а второй при условии $2 \leqslant m_d \leqslant \aleph_0$ (Bagemihl F., Ann. Math., 1952, 55, 34). J. Łoś

3658. Об условии минимальности. Шмидт (Über die Minimalbedingung. Schmidt Jürgen), Arch. Math., 1953, 4, № 3, 172—181 (нем.)

Рассматриваются частично упорядоченные множества (называемые автором упорядоченными), удовлетворяющие условию минимальности. Вначале приводится ряд простых предложений, относящихся к этим множествам, а также ряд известных критериев условия минимальности. Дается теоретико-множественная формулировка индукционного принципа и соответствующее доказательство известного предложения о том, что условие минимальности необходимо и достаточно для его осуществления.

Рассматривается вопрос о возможности построения отображений (в основном многозначных), удовлетворяющих заданным рекуррентным соотношениям. При этом автор следующим образом вводит понятие рекурсии.

Отображение F из множества E в некоторое множество W определяется как множество упорядоченных пар $[a, b]$, где $a \in E$ и $b \in W$, т. е. как подмножество произведения $E \times W$. Образом Fa элемента a называется множество всех тех b, для которых $[a, b] \in F$. Областью определения F считается множество всех тех a, для которых Fa не пусто. Отображение

$$\mathfrak{R} \subseteq (E \times \mathfrak{P}(E \times W)) \times W,$$

где $\mathfrak{P}(E \times W)$ — множество всех подмножеств множества $E \times W$, называется рекурсией. Таким образом, рекурсия $\mathfrak{R}$ ставит в соответствие каждой упорядоченной паре $[a, F]$, где $a \in E$ и F — некоторое отображение из E в W, ее образ $\mathfrak{R}[a, F]$, являющийся подмножеством множества W ($\mathfrak{R}[a, F]$ может быть и пусто).

Отображение F называется выполнением (Erfüllung) рекурсии $\mathfrak{R}$ в множестве $A \subseteq E$, если область определения F лежит в A и если для каждого $a \in A$ выполняется «рекурсионная формула» $Fa = \mathfrak{R}[a, F^a]$, где F^a — отображение, определенное следующим образом:

$$F^a x = \begin{cases} Fx & (\text{если } x < a), \\ 0 & (\text{в противном случае}), \end{cases}$$

где 0 — пустое множество.

Доказывается теорема («рекурсионная теорема») о том, что если E удовлетворяет условию минимальности, то для каждой данной рекурсии $\mathfrak{R}$ в E имеется одно и только одно выполнение F (доказательство аналогичной теоремы, принципиально не отличающееся от приведенного автором, см. в книге Ван-дер-Варден, Современная алгебра, том I, М.—Л., 1947, добавление редактора, 328—329). Отображение F, о котором говорится в теореме, называется отображением, рекурсивно определенным с помощью $\mathfrak{R}$.

За рекурсионной теоремой следует ряд добавлений, относящихся к однозначным отображениям. Затем определяется так называемая беспараметричная рекурсия, т. е. такая рекурсия $\mathfrak{R}$, что для любых $a \in E$, $b \in E$ и $G \subseteq E \times W$ имеет место $\mathfrak{R}[a, G] = \mathfrak{R}[b, G]$. Если рассматривать обычную рекурсию, то каждое отображение F можно рекурсивно определить тривиальным образом. Однако не каждое отображение беспараметрично рекурсивно определимо. Рассматриваются критерии для возможности беспараметричного рекурсивного определения данного отображения (в частности, в случае вполне упорядоченного множества E).

В заключение доказывается, что условие минимальности не только достаточно, но и необходимо для возможности выполнения любой заданной рекурсии. С этой целью для множества E, не удовлетворяющего условию минимальности, строится пример беспараметричной рекурсии, для которой невозможно никакое выполнение F.

Р. Ю. Мацкина

3659 К. Лекции об аналитических множествах и их приложениях. Лузин Н. Н., ред., предисловие и примечания Л. В. Келдыш и П. С. Новикова, 360 стр., Гостехиздат, М., 1953, 11 р. 45 к.

Книга впервые была издана в 1930 г. в Париже в серии монографий по теории функций под редакцией Бореля; в ней излагается ряд результатов Н. Н. Лузина и его учеников в области дескриптивной теории множеств. В настоящем русском переводе сделаны некоторые сокращения и исправления.

Множества берутся в нульмерном пространстве Бэра, т. е. множестве всех иррациональных точек отрезка или n-мерного евклидова пространства, так как при таком изложении формулировки теорем дескриптивной теории множеств получают особую простоту.

В главе I рассматриваются различные операции, приводящие к множествам, измеримым по Борелю (B-множествам). В конце главы затронут вопрос о возможности внутреннего определения меры (проблема меры Бореля) и связанных с этим трудностях.

В главе II подробно изложена теория B-множеств. В частности, изучается конструктивное существование множеств первых четырех классов, обобщается идея рассеянного множества в смысле Данжуа, излагается теорема Лаврентьева о существовании множеств всех подклассов.

Глава III содержит изложение теории аналитических множеств (A-множеств) при помощи геометрических определений их (параметрические изображения и др.) и без использования A-операции. Рассматриваются различные свойства A-множеств, первый принцип отделимости (отделимость B), свойства решет, второй принцип отделимости (отделимость CA).

Глава IV посвящена неявным функциям, удовлетворяющим соотношениям с B-измеримыми левыми частями. В частности, изучаются однозначные и счетнозначные неявные функции.

В главе V изучаются свойства проективных множеств, доказывается существование проективных множеств каждого класса и рода, ставится ряд проблем, касающихся проективных множеств. В конце главы затрагивается идея «резольвенты проблемы» (в смысле Бореля), рассматриваются проективные множества, являющиеся резольвентами некоторых проблем, и анализируется мемуар Лебега (Lebesgue H., J. math., 1905, 1, 139—216).

В заключении приводятся личные взгляды автора по вопросам, связанным с содержанием книги.

В конце книги даны два дополнения. Первое содержит арифметический пример не B-функции, второе содержит замечания о CA-кривых.

Редакторами книги приведены комментарии, касающиеся главным образом дальнейшего развития дескриптивной теории множеств в связи с поставленными в книге проблемами.

П. И. Романовский

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

3660. О суммах ортогональных функций. Алексич (Sur les sommes de fonctions orthogonales. Alexits G.), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1952, **25**, 183—187 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.)

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормированная система функций на интервале (a, b). Полагаем:

$$\lg_p n = \lg\lg \dots \lg n \ (p \text{ раз}) \text{ и}$$

$$L_n(p, \varepsilon) = \lg n \cdot \lg_2 n \dots \lg_p n \, (\lg_{p+1} n)^{1+\varepsilon}.$$

Рассматриваются суммы

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x), \qquad (1)$$

где c_k — любые действительные числа, и доказываются следующие теоремы:

I. Чезаровские (C, α)-суммы $\sigma_n^{(\alpha)}(x)$, составленные для сумм (1), имеют при $\alpha \geqslant 1$ почти всюду порядок

$$\sigma_n^{(\alpha)}(x) = o\left(\sqrt{L_n(p, \varepsilon) \sum_{k=0}^{n} c_k^2}\right).$$

II. Суммы (1) имеют почти всюду порядок

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x) = o\left(\lg n \sqrt{L_n(p, \varepsilon) \sum_{k=0}^{n} c_k^2}\right).$$

В качестве частных случаев этих теорем, полагая $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 1$, получаем уже известные оценки (Kaczmarz S., Steinhaus H., Theorie der Orthogonalreihen, Warszawa—Lwów, 1935, 165; Gal I. S., Ann. Inst. Fourier Univ. Grenoble, 1948, **1**, 53—59).

Н. К. Бари

3661. Влияние структурных свойств функции на сходимость почти всюду ее ряда Фурье. Алексич (Über den Einfluss der Struktur einer Funktion auf die Konvergenz fast überall ihrer Fourierreihe. Alexits G.), Acta math. Acad. sci. hung., 1953, **4**, № 1—2, 95—101 (нем.)

Дается новая формулировка и устанавливается локальный аналог следующей теоремы Колмогорова — Селиверстова (Kolmogoroff A., Seliverstoff G., Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1926, **3**, 307—310): если $f(x) \in L^2[0, 2\pi]$,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (1)$$

и

$$\sum_{n=2}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \ln n < \infty, \qquad (2)$$

то ряд (1) сходится почти всюду. Пусть

$$\omega_2(\delta, f) = \sup_{|h| \leqslant \delta} \left\{ \int_0^{2\pi} [f(x+h) - f(x)]^2 \, dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

есть квадратический модуль непрерывности функции $f(x)$ и

$$\omega_2(\delta, f; a, b) = \sup_{|h| \leqslant \delta} \left\{ \int_a^b [f(x+h) - f(x)]^2 \, dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

— ее локальный квадратический модуль непрерывности на отрезке $[a, b] \subseteq [0, 2\pi]$.

Теорема 1. Для того чтобы выполнялось условие (2), необходимо и достаточно, чтобы существовала положительная монотонно возрастающая функция $\lambda(x)$, для которой

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\lambda(x)} < \infty \text{ и } \omega_2(\delta, f) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(\delta^{-1})}}\right).$$

Теорема 2. Если $f(x) \in L[0, 2\pi]$, $f(x) \in L^2[a, b]$ и

$$\omega_2(\delta, f; a, b) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda(\delta^{-1})}}\right),$$

где функция $\lambda(x)$ положительная, монотонно возрастает и удовлетворяет условию $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\lambda(x)} < \infty$, то ряд Фурье (1) сходится почти всюду на $[a, b]$.

Ряд сходных предложений установлен несколько раньше референтом и П. Л. Ульяновым (РЖМат, 1954, 3284, 3286). В частности, так как из условий теоремы 2 вытекает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \left\{ \omega_2(n^{-1}, f; a, b) \right\}^2 < \infty,$$

то это предложение содержится в теореме 2 работы референта. В дополнение к данным в работе ссылкам следует также указать следующие работы: Randels W. C., Bull. Amer. Math. Soc., 1935, **61**, 663—666; Marcinkiewicz J., J. London Math. Soc., 1935, **10**, 264—268. В последней работе установлено, например, упоминаемое автором, как новое, предложение о том, что если функция $f(x)$ непрерывна и ее модуль непрерывности удовлетворяет условию $\omega(\delta, f) = O\left(\left(\ln \frac{1}{\delta}\right)^{-\alpha}\right)$, где $\alpha > \frac{1}{2}$, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится почти всюду.

С. Б. Стечкин

3662. Об одной тригонометрической сумме. Туран (On a trigonometrical sum. Turan P.), Roczn. Polskiego towarz. mat., (Ann. Soc. polon. math.), 1952, **25**, 155—161 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Начиная с 1911 г. было дано несколько различных доказательств того факта, что частные суммы ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ являются положительными при $x \in (0, \pi)$.

Развивая свой метод (J. London Math. Soc., 1938, **13**, 278—282), автор показывает, что для тригонометрических полиномов с действительными коэффициентами имеют место следующие более общие предложения:

1. Если при $x \in (0, \pi)$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \sin(2k-1)\, x \geqslant 0,$$

то для $x \in (0, \pi)$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{k} \sin kx > 0.$$

2. Если $\sum_{k=0}^{n} a_k = 0$ и при $x \in [0, 2\pi]$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx \geqslant 0,$$

то для $x \in (0, \pi)$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_{k-1}}{k} \sin kx > 0.$$

3. При $x \in (0, \pi)$ и $n = 2, 3, \ldots$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \geqslant 4 \sin^2 \frac{x}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi - x}{2} - \frac{\pi - x}{2} \right).$$

Кроме этого, доказано:

4. Если $\sum_{k=0}^{n} a_k = 0$ и при $x \in [0, 2\pi]$

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k \cos kx \right| \leqslant M,$$

то для $x \in (0, \pi)$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_{k-1}}{k} \sin kx \right| < M \cdot \frac{\pi - x}{2}.$$

5. Пусть $f(x)$ — нечетная на $[0, 2\pi]$ и выпуклая при $x \in [0, \pi]$ функция:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx,$$

тогда при $x \in [0, \pi]$ и $0 \leqslant r \leqslant 1$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k r^k \sin kx \leqslant 2 \sum_{k=1}^{\infty} b_k r^k \sin kx$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

Не приводя доказательств, автор утверждает, что в случаях 2 и 4 условие $\sum_{k=0}^{n} a_k = 0$ можно опустить. *В. К. Дзядык*

3663. Заметка о единственности двойных тригонометрических рядов. Ш а п и р о (A note on the uniqueness of double trigonometric series. S h a p i r o V i c t o r L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 5, 692—695 (англ.)

По определению, двойной ряд $\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} a_{mn}$, где a_{mn} — произвольные комплексные числа, циклически суммируем $(C, 1)$ к числу s, если

$$\lim_{R \to \infty} \sum_{M \leqslant R} a_{mn} \left(1 - \frac{M^2}{R^2}\right) = s,$$

где $M = (m^2 + n^2)^{1/2}$.

Положим

$$F(x, y) = \frac{a_{00}(x + y)^2}{4} - \lim_{R \to \infty} \sum_{1 \leqslant M \leqslant R} a_{mn} M^{-2} e^{i(mx+ny)}.$$

Доказывается следующая теорема:

Пусть $a_{mn} = o(M^{1-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$. Если двойной тригонометрический ряд $\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} a_{mn} e^{i(mx+ny)}$ всюду циклически суммируем $(C, 1)$ к нулю и $F(x, y)$ непрерывна на множестве, дополнительном к некоторому счетному замкнутому множеству, то $a_{mn} = 0$ для всех m, n. *И. Е. Жак*

3664. (C, α, β)**-суммируемость рядов Фурье функций двух переменных. Т и м а н М. Ф.**, Сообщ. АН ГрузССР, 1953, **14**, № 7, 385—392

Доказываются 3 теоремы, относящиеся к суммируемости методами (C, α, β) двойных рядов Фурье.

Т е о р е м а 1. Пусть функция $f(x, y)$ суммируема в прямоугольнике $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi; -\pi \leqslant y \leqslant \pi)$.

Обозначим $\psi(u, v) = f(x + u, y + v) + f(x - u, y + v) + f(x + u, y - v) + f(x - u, y - v) - 4f(x, y)$,

$$\Phi(u, v) = \int_0^u \int_0^v |\psi(t, \theta)|\, dt d\theta.$$

Если в точке (x, y) $\Phi(u, v) = O(uv)$, то двойной ряд Фурье для этой функции либо суммируется в этой точке методом (C, α, β) при любых $\alpha > 0$, $\beta > 0$, либо не суммируется ни одним методом (C, α, β).

Две другие теоремы касаются (C, α, β)-суммируемости почленно продифференцированного двойного ряда Фурье. Кроме того, приводится доказательство теоремы, обобщающей теорему Андерсена (Зигмунд А., Тригонометрические ряды, ГОНТИ НКТП, М.—Л., 1939, стр. 261), на двойные ряды и опубликованной ранее без доказательства (Ти-

ман М. Ф., Докл. АН СССР, 1951, **76**, № 5, 647—649). Если двойной числовой ряд суммируем методом (C, α', β') при некоторых $\alpha' > -1$ и $\beta' > -1$ и (C, α, β)-средние этого ряда при некоторых α и β, удовлетворяющих условиям $-1 < \alpha < \alpha'$, $-1 < \beta < \beta'$, ограничены, то ряд суммируем к тому же числу методом (C, α', β') уже при любых α' и β', превосходящих α и β соответственно.

Ф. И. Харшиладзе

3665. Тригонометрические нуль-ряды в дифференциальных уравнениях. У а м с л и (Null trigonometric series in differential equations. W a l m s l e y C h a r l e s), Canad. J. Math., 1953, **5**, № 4, 536—543 (англ.)

Отправляясь от результатов Верблунского и Вулфа (Verblunsky S., Proc. London Math. Soc., 1932, **34**, 457—491; Wolf F., Proc. London Math. Soc., 1939, **45**, 328—356) о том, что тригонометрические ряды, суммируемые методами Чезаро целого порядка к нулю всюду на периоде, кроме, быть может, конечного числа точек ξ_k, суть линейные комбинации рядов вида

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n(x - \xi_k)$$

и их производных соответствующих порядков, автор рассматривает вопрос о возможности использования такого рода тригонометрических нуль-рядов для решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Если правая часть уравнения

$$\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu y^{(m-\nu)} = f(x)$$

($a_0, a_1, \ldots, a_m$ — константы)

определяется тригонометрическим рядом $\sum \gamma_n e^{inx}$, суммируемым к ней методом (C, r) (r — целое неотрицательное число) равномерно в $(-\pi, \pi)$, за возможным исключением окрестностей конечного числа точек, то его решение представимо в $(-\pi, \pi)$ некоторым тригонометрическим рядом $y = \sum c_n e^{inx}$, который сходится, если $r \leqslant m$, и суммируется методом $(C, r - m)$, если $r \geqslant m$, равномерно там же, где и ряд для $f(x)$. Даны формулы для коэффициентов тригонометрического ряда, представляющего общее решение на указанном интервале.

А. Ф. Тиман

3666. Приближенное решение задачи о начальном значении при помощи обобщенных основных рядов. Б р а н к (Approximate solution of an initial value problem by generalized cardinal series. B r u n k H. D.), Quart. Appl. Math., 1953, **11**, № 3, 285—294 (англ.)

Пусть в плоскости переменных x и y задано множество E, содержащее ось x. Пусть, кроме того, для точек этого множества определена функция $\varphi(t; x, y)$ с интегрируемым квадратом относительно t на $[-\pi, \pi]$ и такая, что

$$\varphi(t; x, 0) = e^{-ixt}.$$

Для всех $\lambda > 0$ рассматривается последовательность функций

$$A_{k,\lambda}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t/\lambda; x, y)\, e^{ikt}\, dt$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

и любой функции $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ приводится в соответствие ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\lambda)\, A_{k,\lambda}(x, y), \qquad (1)$$

который формально определяет на множестве E некоторую функцию $U(x, y)$, совпадающую с $f(x)$ в точках $x = k\lambda$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ оси x. Устанавливается достаточное условие для того, чтобы ряд (1) сходился и чтобы при $\lambda \to 0$ его сумма стремилась к функции $U(x, y)$, заданной на E и единственным образом определяемой своими значениями $f(x)$ на оси x. Пусть: 1) $F(t)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию на $(-\infty, \infty)$; 2) для $|t| \leqslant \pi/\lambda$ ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(t + 2k\pi/\lambda)$$

сходится абсолютно и равномерно к некоторой функции $F_\lambda(t)$; 3) для каждой точки (x, y) из множества E существует функция $L(t; x, y)$ из $L(-\infty, \infty)$, для которой, при $|t| \leqslant \pi/\lambda$,

$$|F_\lambda(t)\, \varphi(t; x, y)| \leqslant L(t; x, y).$$

Тогда интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{-ixt}\, dt$$

сходится к некоторой функции $f(x)$, обладающей тем свойством, что для $(x, y) \in E$ ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\lambda)\, A_{k,\lambda}(x, y)$$

сходится к

$$U_\lambda(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/\lambda}^{\pi/\lambda} F_\lambda(t)\, \varphi(t; x, y)\, dt$$

и, когда $1/\lambda$ стремится к ∞ вдоль натурального ряда чисел,

$$U_\lambda(x, y) \to U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, \varphi(t; x, y)\, dt.$$

При этом $U(x, 0) = f(x)$. При доказательстве используется одна лемма, эквивалентная известной формуле Пуассона для рядов вида 2).

Подробно рассмотрен случай ядра $\varphi(t; x, y) = e^{-itx - yt^2}$, связанного с задачей о теплопроводности для неограниченного изолированного стержня. Затем указывается на возможность приложения результатов автора для приближенного нахождения значений функции распределения ве-

роятностей одной из двух независимых случайных величин, если известна функция распределения их суммы и другая случайная величина распределена по нормальному закону. *А. Ф. Тиман*

3667. Обобщение модуляционных спектров. Чжан Хань, Райдаут (A generalization of modulation spectra. Chang Han, Rideout V. C.), Quart. Appl. Math., 1953, **11**, № 1, 87—100 (англ.)

Рассматривается задача представления модулированной волны в виде суммы волн. В случае соизмеримости несущей (ω) и модулирующей (Ω) частот эта задача сводится в математическом отношении к разложению в ряд Фурье некоторой периодической функции (например, функции типа $e(t) = A\sin(\omega t + m\sin\Omega t)$ в случае частотной модуляции). В работе устанавливаются такие разложения для нескольких видов модуляции и указывается, что в случае несоизмеримых ω и Ω задача сводится, вообще говоря, к разложению почти периодической функции в ряд Фурье. *Ю. М. Березанский*

3668. Равномерное приближение коэффициентов Фурье. Хункоса, Янг (A uniform approximation to Fourier coefficients. Juncosa M. L., Young D. M.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 3, 373—374 (англ.)

Доказывается, что последовательности римановых сумм для интегралов, определяющих коэффициенты Фурье функции $f(x)$, равномерно сходятся к этим коэффициентам. Функция $f(x)$ непрерывна, за исключением конечного числа разрывов первого рода. *Ф. В. Широков*

3669. Примечание к статье «δ-функция Дирака и суммирование рядов Фурье». Бергер (Comments on «The Dirac delta function and the summation of Fourier series». Berger Erich R.), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, **24**, № 7, 951 (англ.)

Отмечается ряд ошибок, сделанных в статье Шпигеля (Spiegel M. R., J. Appl. Phys. (N. Y.), 1952, **23**, 906), не влияющих, однако, на конечные результаты.

3670 Д. О наилучших приближениях в среднем функций многих переменных посредством целых функций конечной степени и многочленов. Джафаров А. С. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Азербайджанский гос. пед. ин-т, Баку, 1954

См. также: 3555, 3639, 3640, 3688, 3706, 3750, 3759, 3762

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

3671. О порядке множества полиномов, обратного к базисному множеству. Михаил (On the order of the reciprocal set of a basic set of polynomials. Mikhail M. N.), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 3, 617—623 (англ.)

Пусть дано базисное множество $\{p_n(z)\}$ полиномов, $p_n(z) = \sum_i p_{ni} z^i$, т. е. такое множество, что каждая степень z может быть представлена единственным образом в виде:

$$z^n = \sum_{i=0}^{Dn} \pi_{ni} p_i(z)$$

Множество полиномов $\left\{ p_n(z) = \sum_i \pi_{ni} z^i \right\}$ называется обратным к множеству $\{p_n(z)\}$. Порядком базисного множества полиномов $\{p_n(z)\}$ называется число $\omega = \lim_{R\to\infty} \omega(R)$, где

$$\omega(R) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log \omega_n(R)}{n \log n},$$

$$\omega_n(R) = \sum_i |\pi_{ni}| M_i(R),\ M_i(R) = \max_{|z|\leqslant R} |p_i(z)|.$$

Тип γ определяется так: $\gamma = \lim_{R\to\infty} \gamma(R)$, причем

$$\gamma(R) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \{\omega_n(R)\}^{1/n\omega} e/(n\omega).$$

Обозначим при фиксированном n через $p_{nh'}$ те из p_{nh}, которые не равны нулю, и положим $p'_n = \min_{h'} p'_{nh'}$. В предположении $\pi_{nn} \neq 0$ доказывается следующая теорема:

Пусть $\{p_n(z)\}$ — базисное множество полиномов порядка ω и типа γ такое, что $\overline{\lim_{h\to\infty}} \frac{D_n}{n} = a \geqslant 1$. Положим

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{\log|\pi_{nn}|}{n \log n};\quad K = \lim_{n\to\infty} \frac{\log|p'_n|}{n \log n}.$$

Тогда обратное множество имеет порядок Ω, где
1) $\Omega \leqslant \omega - k$, если $K > \omega$,
2) $\Omega \leqslant 2\omega - K - k$, если $K \leqslant \omega$.

Приведены примеры, показывающие, что оценки, данные в теореме, являются наилучшими.
С. Я. Хавинсон

3672. Аналитически непродолжимые ряды по многочленам Фабера. Илиев (Аналитично непродължими редове по полиноми на Фабер. Илиев Любомир), Изв. матем. ин-т (Бълг. АН), 1953, **1**, № 1, 35—56 (болг.)

Рассматриваются ряды по многочленам Фабера

$$\sum_0^\infty c_n \Phi_n(z), \qquad (1)$$

причем многочлены определяются при отображении дополнения области с правильной аналитической границей на дополнение единичного круга. На ряды (1) переносится известная теорема Сегё о степенных рядах (РЖМат, 1953, 1163). Доказывается следующая теорема, обобщающая результат автора о степенных рядах (Годишник на Соф. университет, физ.-матем. фак., 1944 — 1945, 41, № 1, 31 — 41; 1945 — 1946, 42, № 1, 67 — 81):

Если последовательность $\{c_n\}$ ограничена и существует такая последовательность индексов $\{n_k\}$, что $\lim_{k\to\infty} c_{n_k} = \alpha$, а при любом целом положительном r $\lim_{k\to\infty} c_{n_k-r} = \beta \neq \alpha$, то сумма ряда (1) непродолжима через границу области.

Приводятся и другие обобщения теоремы Сегё.

П. К. Суетин

3673. О полноте систем аналитических функций, близких к $\{z^n P(z)\}$, $\{[\varphi(z)]^n\}$, и о некоторых интерполяционных задачах. Е в г р а ф о в М. А., Изв. АН СССР, сер. матем., 1953, 17, № 5, 421—460

Из числа интерполяционных проблем, характеризуемых данными

$$F^n(a_n) \quad (n = 0,1,2, \ldots),$$

лишь немногие являются решенными до конца в том смысле, чтобы необходимые и достаточные условия представимости функции соответствующим рядом были между собой достаточно сближены: хотя бы сведены между собой с точностью до типовой константы (в случае целой функции конечного порядка и конечного типа). К числу проблем, допускающих подобного рода решения, относятся, например, следующие: 1) $a_n = n$ (Гончаров В. Л., Матем. сб., 1935, 42, 473; Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, Гостехиздат, М. — Л., 1952, 284); 2) $a_n = (-1)^n$ (Гончаров В. Л., Сообщ. Харьковского матем. о-ва, 1932, 5, 67—85); 3) $a_n = q^n (|q| > 1)$ (Гончаров В. Л.. Ann. scient. École norm. supér., 1930, 47, 37; Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, 266).

На этих трех примерах автор демонстрирует силу предлагаемого им метода, позволяющего дать решение задач, «близких» ко многим «правильным» задачам. Именно:

1. Если $a_n = n + \lambda_n$, причем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n|^2$ сходящийся, то разложение функции $F(z)$ в соответствующий интерполяционный ряд имеет место (равномерно во всякой конечной области) при условии, что

$$|F(re^{i\theta})| < Me^{\tau[h(\theta)-\varepsilon]},$$

где $h(\theta)$ — та же индикатриса, что и в случае 1); другими словами, при условии, что все особенности функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n/z^{n+1}$, ассоциированной по Борелю с функцией $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n$, находятся в области $|ze^z| < e^{-1}$, содержащей точку $z = 0$. Напротив, если последнее условие не выполнено, то возможно построение функции $F(z)(\not\equiv 0)$, удовлетворяющей равенствам

$$F^n(n + \lambda_n) = 0 \quad (n = 0,1,2, \ldots).$$

2. Если $a_n = (-1)^n + \lambda_n$ при прежнем ограничении на λ_n, то при условии, что типовая константа

$$\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r)}{r}$$

меньше, чем $\pi/4$, функция $F(z)$ разлагается в ряд интерполяционных многочленов (сходящийся равномерно во всякой конечной области); напротив при условии $\sigma > \pi/4$ возможно построение функции $F(z)(\not\equiv 0)$, удовлетворяющей равенствам

$$F^{(n)}\left((-1)^n + \lambda_n\right) = 0 \quad (n = 0,1,2, \ldots).$$

3. Аналогичные результаты получаются и в случае, если $a_n = q^n + \lambda_n$ $(|q| > 1)$ в предположении сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{\lambda_n}{q^n}\right|^2$. Разлагается ли в соответствующий интерполяционный ряд функции $F(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ или, напротив, можно построить функцию $F(z)$, удовлетворяющую требованиям

$$F^{(n)}(q^n + \lambda_n) = 0 \quad (n = 0,1,2, \ldots),$$

зависит от того, будет ли константа

$$A = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}/e\,|q|^{(n+1)/2}$$

меньше или больше, чем модуль ближайшего к началу нуля функции

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} q^{-\frac{n(n+1)}{2}}$$

(приводится также эквивалентное условие, которое связывает с упомянутым нулем характеристику $M(r)$). Сущность примененного метода заключается в сведении проблемы к решению некоторого интегрального уравнения.

В. Л. Гончаров

3674. О сингулярных интегралах в комплексной области. Б а т ы р е в А. В., Уч. зап. Ростовского-на-Дону гос. пед. ин-та, 1953, № 2, 39—47

Рассматриваются интегралы вида $f_n(z) = \int_C F_n(z,t) f(t) dt$, где C — окружность $|t| = 1$, $f(z)$ функция аналитическая и непрерывная до границы включительно и ядра $F_n(z, t)$ имеют вид

$$F_n(z,t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{t^n} \frac{t^n - z^n}{t - z}$$

либо

$$F_n(z,t) = \frac{1}{2n\pi i} \left[\frac{t^n - z^n}{t - z}\right]^2 \frac{1}{z^{n-1} \cdot t^n}.$$

В первом случае $f_n(z)$ является n-й частной суммой ряда Тейлора для функции $f(z)$, а во втором—средним арифметическим первых n частных сумм. Доказательства теорем о приближении функции $f(z)$ функциями $f_n(z)$ получаются автором со ссылкой на свойства полиномов наилучшего приближения; однако те же результаты могут быть сразу получены из теории рядов Фурье.

В качестве приложения доказывается, что аналитическая функция $f(z)$, непрерывная в замкнутой области, ограниченной кривой с ограниченной кривизной, может быть представлена в виде суммы ряда по полиномам Фабера внутри области. Автор считает этот результат новым; однако результат этот является частным случаем ранее известной теоремы (Маркушевич А., Изв. АН СССР, сер. матем., 1944, 8, 49—60). *П. П. Белинский*

3675. Конформное отображение прямоугольника с полукруговым вырезом. Эфезер, Шталь-ман (Konforme Abbildung eines Rechtecks mit Halbkreiskerbe. Epheser Helmut, Stallmann Friedemann), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 8—9, 268—269 (нем.)

Авторы дают приближенный способ конформного отображения прямоугольника, из которого удален полукруг с диаметром на стороне прямоугольника, на область вида

$$\operatorname{Im} x > 0, \quad |x| > \rho, \quad \rho < 1.$$

При помощи эллиптического интеграла 3-го рода

$$\eta(x) = A \int_0^x \frac{\xi^2 - c}{\xi^2 - a} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}$$

область $\operatorname{Im}(x) > 0$, $|x| > \rho$, $\rho < 1$ отображается на прямоугольник с криволинейным вырезом. Возможно, оказывается, так подобрать параметры a, c, k, ρ, чтобы вырез можно было с достаточной для практики точностью считать полукругом наперед заданного радиуса (в работе нет оценки погрешности такого приближения).

В другой статье тех же авторов (Arch. Math. 1952, **3**, 276—281) решается аналогичная задача для полосы с полукруговым вырезом. *М. Б. Балк*

3676. О трижды симметричных однолистных функциях. Илиев (Върху три-симетричните еднолистни функции. Илиев Любомир), Изв. матем. ин-т (Бълг. АН), 1953, **1**, № 1, 27—34 (болг.)

Рассматривается класс $S_k (k = 1,2, \ldots)$ функций $f_k(z) = z + a_1^{(k)} z^{k+1} + a_2^{(k)} z^{2k+1} + \ldots$ k-симметричных и однолистных в круге $|z| < 1$. Частную сумму ряда для $f_k(z) \in S_k$ обозначим $\sigma_n^{(k)}(z) = z + a_1^{(k)} z^{k+1} + \ldots + a_n^{(k)} z^{kn+1}$, $n = 1, 2, \ldots$; $k = 1, 2, \ldots$

Доказываются следующие теоремы:

1. Если $f_3(z) \in S_3$, то функция $\sigma_n^{(3)}(z)$ при $n \neq 2$ однолистна в круге $|z| < \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$. Эта константа не может быть заменена бо́льшей, что показывает пример: $\sigma_1^{(3)}(z) = z + \frac{2}{3} z^4$ для функции $f_3(z) = \frac{z}{(1 - z^3)^{2/3}}$.

2. Если $f_3(z) \in S_3$, то функция $\sigma_n^{(3)}(z)$ однолистна в круге

$$|z| < \left\{ 1 - \frac{8}{3} \frac{\ln[\theta(n+1)]}{n+1} \right\}^{1/3}; \quad \theta = 7 \cdot 96^{3/8} \cdot 3^{1/4} \cdot 2^{7/8};$$
$$n = 1, 2, \ldots$$

3. Если $f_3(z) \in S_3$, то функция $\frac{\sigma_n^{(3)}(z)}{z}$ не обращается в нуль в круге

$$|z| \leqslant \left\{ 1 - \frac{4}{3} \frac{\ln[a(n+1)]}{n+1} \right\}^{1/3}; \quad a = 7 \cdot 96^{3/7} \cdot 3^{3/4} \cdot 2^{1/2};$$
$$n = 1, 2, \ldots$$

4. Если $f_3(z) \in S_3$, то

$$|a_n^{(3)}|^2 \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \frac{|a_{n-\nu}^{(3)}|^2}{3\nu - 1}; \quad n = 1,2, \ldots$$

Опираясь на эту формулу и известные оценки $|a_1^{(3)}| < \frac{2}{3}$, $|a_2^{(3)}| < 0{,}579$, автор дает оценки сверху для $|a_n^{(3)}|$ при $n = 3,4,\ldots, 9$.

Аналогичные результаты для классов S_1 и S_2 были получены автором ранее (Докл. АН СССР, 1949, **69**, № 4, 491—494; 1950, **70**, № 1, 9—11). Краткое содержание реферируемой работы опубликовано в Докл. АН СССР, 1951, **79**, № 1, 9—11; 1952, **84**, № 1, 9—12. *Н. А. Лебедев*

3677. Об общей форме теоремы Фрагмена — Линделёфа. Ершш (Sur une forme générale du théorème de Phragmén — Lindelöf. Hersch Joseph), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 13, 641—643 (франц.)

Пусть $\{c\}$ — семейство кривых и $L_{\{c\}}$ — его экстремальная длина (автор пользуется несколько отличным от введенного ранее Альфорсом и Бёрлингом (РЖМат, 1953, 1168) определением экстремальной длины).

Устанавливается неравенство

$$L_{\{c_1\} \cup \{c_2\}}^{-1} \leqslant L_{\{c_1\}}^{-1} + L_{\{c_2\}}^{-1}. \qquad (1)$$

В случае, когда множества, покрываемые семействами $\{c_1\}$ и $\{c_2\}$, не пересекаются, в (1) имеет место равенство.

Для определения экстремальной длины по Альфорсу и Бёрлингу ранее было установлено Штребелем более слабое неравенство

$$L_{\{c_1\} \cup \{c_2\}}^{-1/2} \leqslant L_{\{c_1\}}^{-1/2} + L_{\{c_2\}}^{-1/2}.$$

Чтобы сформулировать дальнейшие результаты, потребуется понятие «модуля». Если дан прямоугольник, стороны которого β' и β'' имеют длину b, а стороны α' и α'' длину a, то «модуль» $\mu_{\beta'\beta''} = a/b$, а «модуль» $\mu_{\alpha'\alpha''} = b/a$. Это понятие при помощи

конформного отображения естественным образом распространяется на область с жордановой границей, на которой отмечены четыре точки.

Пусть область G ограничена жордановой кривой Γ и α — дуга Γ. Пусть дано семейство жордановых дуг $\{\theta_\lambda\} \subset G$, $0 \leqslant \lambda < +\infty$, с концами на $\Gamma \setminus \alpha$. Предположим семейство $\{\theta_\lambda\}$ стягивающимся при $\lambda \to \infty$ в точку $E \in \Gamma \setminus \alpha$ и таким, что если $\lambda' < \lambda < \lambda''$, то θ_λ отделяет $\theta_{\lambda'}$ и α от $\theta_{\lambda''}$.

Пусть p и q — точки области G. Буквой ω будем обозначать соответствующие гармонические меры. Устанавливаются соотношения:

$$\mu_{\alpha\theta_\lambda} = \mu_{\theta_0\theta_\lambda} + O(1);$$

$$\omega_{q\theta_\lambda} = \omega_{p\theta_\lambda} e^{O(1)};$$

$$\omega_{p\theta_\lambda} = e^{-\pi\mu_{\theta_0\theta_\lambda}+O(1)}$$

Указывается на возможность обобщения этих формул на случай, когда G — многосвязная область и E — свободная жорданова дуга ее границы. Этот последний случай и рассматривается далее. Пусть $u(z)$ — гармоническая в G функция, неположительная на $\Gamma \setminus E$. Положим

$$\sigma_0 = \lim_{\lambda\to\infty}\left(u_\lambda e^{-\pi\mu_{\theta_0\theta_\lambda}}\right), \text{ где } u_\lambda = \max_{z\in\theta_\lambda} u(z).$$

Автор формулирует следующие обобщения теоремы Фрагмена — Линделёфа:

Теорема 1. Если $\sigma_0 \leqslant 0$, то $u(z) \leqslant 0$ в G.

Теорема 2. Если $\sigma_0 = -\infty$, то $u(z) \equiv -\infty$ в G.

Если $\sigma_0 \geqslant 0$, то, положив $\omega_\lambda = \omega_{p\theta_\lambda}$, имеем:

$$u(p) \leqslant \frac{8}{\pi}\ \sigma_0 e^{-2\pi\nu\left(\sin\frac{\pi\omega_p}{2}\right)},$$

если θ_0 отделяет p от E и ν — неотрицательная убывающая функция, введенная автором (C. r. Acad. sci., 1952, 235, 569).

В заключение делается замечание о возможности установления соотношения, аналогичного (1) в трехмерном случае, и получения аналогов теорем 1 и 2. Доказательства всех результатов только намечены. *С. Я. Хавинсон*

3678. Некоторые дополнения к теореме Гурвица-Пинкерле о сложении особенностей. Вилсон (Some applications of the Hurwitz-Pincherle composition theory. Wilson R.), J. London Math. Soc., 1953, 28, ч. 4, 112, 484—490 (англ.)

Пусть

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^{-n-1},\ g(z) = \sum_0^\infty b_n z^{-n-1},$$

$$h(z) = \sum_0^\infty \left(\sum_{\nu=0}^m c_m^\nu a_{m-\nu} b_\nu\right) z^{-m-1}.$$

Известная теорема Гурвица — Пинкерле о сложении особенностей утверждает, что если γ — особая точка $h(z)$, то тогда или $\gamma = \alpha + \beta$, где α — особая точка $f(z)$, β — особая точка $g(z)$, или каждая непрерывная кривая, соединяющая γ с ∞, проходит обязательно через точку вида $\alpha + \beta$. В статье изучается вопрос о том, как ведет себя функция $h(z)$ в окрестности особой точки $\gamma = a + b$, если известно, как ведут себя в окрестностях точек a и b соответственно функции $f(z)$ и $g(z)$, причем предполагается, что a и b для этих функций — изолированные особые точки, не являющиеся точками ветвления.

Пусть $f(z) = f_1(z) + f^*(z)$, где $f_1(z)$ имеет единственную особую точку a, а $f^*(z)$ в точке a — аналитическая. В окрестности точки b аналогично имеем $g(z) = g_1(z) + g^*(z)$.

Лемма 1. Если точка $(a + b)$ не повторяется в множестве точек вида $\alpha + \beta$ и не является предельной для этого множества, то тогда $h(z) = h_1(z) + h^*(z)$, где $h^*(z)$ в точке $(a + b)$ — аналитическая, а $h_1(z)$ образуется из $f_1(z)$ и $g_1(z)$ так же как $h(z)$ — из $f(z)$ и $g(z)$. При помощи этой леммы изучение поведения $h(z)$ в окрестности точки $\gamma = a + b$ сводится к изучению поведения в этой окрестности функции $h_1(z)$. Метод изучения основан на том, что если $F(z)$, $G(z)$ и $H(z)$ — целые функции, ассоциированные по Борелю с $f(z)$, $g(z)$ и $h(z)$, то тогда $H(z) = F(z) \cdot G(z)$.

Теорема 1. Если a — полюс порядка $(m + 1)$ для $f(z)$, а b — полюс порядка $(n + 1)$ для $g(z)$, то тогда $(a + b)$ является полюсом порядка $(m + n + 1)$ для $h(z)$.

Теорема 2. Если a — существенно особая точка $f(z)$, а b — полюс или существенно особая точка $g(z)$, то тогда $(a + b)$ — существенно особая точка $h(z)$.

Пусть

$$f_1(z) = \sum_0^\infty A_\mu (z-a)^{-\mu-1}.$$

По определению особая точка a функции $f(z)$ или, что то же самое, функции $f_1(z)$ называется особой точкой порядка ρ и типа σ, если целая функция $\sum_0^\infty A_\mu z^\mu$ имеет порядок ρ и тип σ.

Теорема 3. Пусть $f(z)$ и $g(z)$ имеют соответственно в a и b особые точки порядков ρ и ρ_1, причем $\rho > \rho_1$. Тогда $h(z)$ имеет в $(a + b)$ особую точку того же порядка, типа и то же направление наибольшего роста, что и функция $f(z)$ в точке a.

Далее рассматривается случай, когда порядки особых точек a и b равны. Формулировку соответствующей теоремы 4 ввиду ее сложности опускаем. *А. Ф. Леонтьев*

3679. Замечание к статье Бака. Сингх (A note on a paper of R. C. Buck. Singh S. K.), Proc. Indian Acad. Sci., 1953, **A38**, 120 (англ.)

Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ. Обозначим

$$\lim \begin{matrix}\sup\\ \inf\end{matrix} \frac{\log M(r)}{r^\rho} = \begin{matrix}T\\ t\end{matrix},\ \lim \begin{matrix}\sup\\ \inf\end{matrix} \frac{n(r)}{r^\rho} = \begin{matrix}L\\ l\end{matrix},$$

где $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, $n(r)$ — число нулей $f(z)$ в круге $|z| \leqslant r$.

Известно, что всегда имеют место неравенства

$$l \leqslant \rho T, \tag{1}$$

$$l + L \leqslant e \cdot \rho \cdot T. \tag{2}$$

В заметке уточняются соотношения между l, L, T и ρ. При помощи элементарных соображений, основанных на неравенстве

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt \leqslant A + \log M(r),$$

доказана следующая теорема: если $l = \rho T$, то и $L = \rho T$ и, следовательно, в соотношениях (1) и (2) знаки равенства не могут иметь места одновременно. *А. В. Батырев*

3680. Теоремы полноты для систем дифференциальных операторов. Дейвис (Completeness theorems for sets of differential operators. Davis Philip), Duke Math. J., 1953, 20, № 3, 345—357 (англ.)

1. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность комплексных чисел, подчиненная условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu| = k \quad (0 < k < \infty).$$

Если функция $f(z)$, целая, порядка 1 и типа, меньшего чем $1/ek$, удовлетворяет требованиям

$$f^{(n)}(a_n) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

то она есть тождественный нуль.

2. То же заключение справедливо для функций указанного выше класса, удовлетворяющих требованиям

$$f^{(2n)}(a_{2n}) = 0,\ f^{(2n)}(a_{2n+1}) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

при условии, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n} \zeta_\nu = k,$$

где

$$\zeta_{2n} = |a_{2n}|,\ \zeta_{2n+1} = \max\{|a_{2n}|, |a_{2n+1}|\}.$$

Результаты 1—2 являются частными случаями некоторой общей теории, приводящей к достаточным условиям (различных типов) для того, чтобы из равенств вида

$$L_n[f] = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где положено

$$L_n[f] \equiv \sum_{k=n}^{\infty} a_{nk} f^{(k)}(0)/k! \quad (a_{nn} = 1),$$

и из предположения о принадлежности функции f некоторому классу A (включающему все функции, регулярные в точке $z = 0$) следовало тождество $f \equiv 0$.

Указанная константа $1/ek$ не может быть улучшена: автор устанавливает это с помощью примеров, весьма просто связанных с функциями Миттаг-Леффлера $E_\rho(z)$ (Montel P., Leçons sur les fonctions univalentes ou multivalentes, 1933, стр. 83). *В. Л. Гончаров*

3681. Условие гиперболичности одного класса римановых поверхностей. Потягайло Д. Б., Украинский матем. ж., 1953, 5, № 4, 459—463

Рассматриваются односвязные римановы поверхности F, получаемые следующим образом. На плоскости w (лист H_0) из точек $w_k = v_k i$, $v_k > 0$, и $w_k' = -v_k' i$, $v_k' > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, проводятся горизонтальные разрезы в сторону $-\infty$ и вдоль каждого из этих разрезов к H_0 приклеивается по одному экземпляру плоскости w. Доказывается, что если $v_k = k$ и последовательность $\{v_k'\}$ растет достаточно быстро, например, так, что $v_{k+1}'/v_k' \geqslant q > 1$, то F — поверхность гиперболического типа. *Л. И. Волковыский*

3682. Заметка о гармонической мере достижимой границы римановой поверхности наложения. Оцука (Note on the harmonic measure of the accessible boundary of a covering Riemann surface. Ohtsuka Makoto), Nagoya Math. J., 1953, 5, 35—38 (англ.)

Настоящая заметка содержит уточнения неравенств, доказанных автором ранее (Nagoya Math. J., 1952, 4, 109—118). Пусть R — риманова поверхность с положительной границей, расположенная над римановой поверхностью $\boldsymbol{R}$. Пусть C — пути на R, сходящиеся к точке идеальной границы R и имеющие проекцию на $\boldsymbol{R}$, сходящуюся к точке $\boldsymbol{R}$; $v(P)$ — непрерывные гармонические функции на R такие, что $0 \leqslant v \leqslant 1$, и вдоль путей C $\lim v(P) = 1$; $\mu(P, R)$ — нижняя огибающая функций $v(P)$, гармоническая по принципу Перрона—Брело. Индексом ∞ будем обозначать универсальную поверхность наложения.

1) Пусть $\boldsymbol{R}'$ — проекция R на $\boldsymbol{R}$. Предположим, что $(\boldsymbol{R}')^\infty$ негиперболического типа, но что $\boldsymbol{R}$ покрывает лишь конечное число раз конечное число точек P_n поверхности $\boldsymbol{R}$, так что $(\boldsymbol{R} - \{P_n\})^\infty$ гиперболического типа. Пусть $\tilde{R}$ — поверхность, получаемая из R удалением точек, проектирующихся в точки P_n. Было доказано (см. предыдущую ссылку), что $\mu(P, R) \geqslant \mu(P, \tilde{R}^\infty)$. Здесь автор доказывает равенство.

2) Предположим, что R — область на $\boldsymbol{R}$ с положительной границей. Было доказано (см. там же), что $\mu(P, R) \geqslant \mu(P, R^\infty)$.

Здесь автор доказывает равенство. В доказательстве используется принцип Перрона—Брело. *Поссель (R. de Possel)*

Из Math. Rev., 1953, 14, № 9, 862.

3683. Представление аналитической функции двух переменных при помощи двойного бесконечного произведения. Слепенчук К. М., Успехи матем. наук, 1953, 8, № 2 (54), 139—142

Всякая аналитическая функция от двух переменных $f(x, y)$, для которой $f(0, 0) = 1$, допускает внутри некоторой области, содержащей начало координат, единственное представление в виде абсолютно сходящегося двойного бесконечного

произведения

$$\prod_{m=0}^{\infty}\prod_{n=0}^{\infty}(1+a_{mn}x^m y^n)\ (a_{00}=0).$$

В доказательстве этой теоремы имеется ряд мелких погрешностей. *С. Б. Стечкин*

3684. О распространении на целые функции n переменных конечного порядка канонического разложения Вейерштрасса. Л е л о н (Sur l'extension aux fonctions entières de n variables d'ordre fini d'un développement canonique de Weierstrass. L e l o n g P i e r r e), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 16, 865—867 (франц.)

1. Если $\mu(t)$ — положительная неубывающая функция при $t>0$, а $\nu(t)=(2n-2)\,t^{2-2n}\mu(t)$ при $n\geqslant 2$, $\nu(t)=\mu(t)$ при $n=1$ и $\lambda(t)=\int_{t_0}^{t}\nu(t)\,\frac{dt}{t}+\lambda(t_0)$, то условия:

$$\text{a)}\ \int_1^{\infty}\frac{d\nu(t)}{t^{\alpha}}<\infty,\quad \text{b)}\ \int_1^{\infty}\frac{d\mu(t)}{t^{2n+\alpha-2}}<\infty,$$

$$\text{c)}\ \lim_{t\to\infty}\frac{\nu(t)}{t^{\alpha}}=0\ \text{и}\ \int_1^{\infty}\frac{\nu(t)\,dt}{t^{\alpha+1}}<\infty,$$

$$\text{d)}\ \lim_{t\to\infty}\frac{\lambda(t)}{t^{\alpha}}=0\ \text{и}\ \int_1^{\infty}\frac{\lambda(t)\,dt}{t^{\alpha+1}}<\infty$$

эквивалентны при $\alpha\geqslant 0$.

2. Пусть $h(a,z)=|az|^{2-2n}$, где $|az|$ — евклидово расстояние между точками a, z; $z\equiv(z_1,\ldots,z_n)$; $z_i=r\alpha_i$; (α_i) — единичный вектор; ядро

$$h_q(a,z)=h(a,z)-\left[h(a,0)+\ldots+\frac{r^q}{q!}\frac{\partial^q h(a,0)}{\partial r^q}\right]$$

для $z\neq a$, $|a|\neq 0$; $g(R,a,z)=h(a,z)-\xi(R,a,z)$ — функция Грина для гипершара $B(R)$ с центром в начале радиуса R.

Если $\lim_{R\to\infty}\frac{\nu(R)}{R^{q+1}}=0$, то для положительной меры $d\mu$ интеграл $\int d\mu(a)\,\xi_q(R,a,z)$ сходится к нулю равномерно на всяком компакте.

Далее формулируется теорема:
Пусть $V(z)=V(z_1,\ldots,z_n)$ — полигармоническая функция во всем пространстве R^{2n} и $\lambda(V^+,0,R)$ — среднее арифметическое $V^+=\sup(V,0)$ на поверхности гипершара $B(R)$.

Если $\lim_{t\to\infty}\frac{\lambda(V^+,0,t)}{t^{q+1}}=0$ и мера $d\mu$, присоединенная к V, равна нулю в окрестности начала координат, то равномерно для всякого компакта пространства имеет место представление:

$$V(z)=\operatorname{Re}[P_q(z)]-\lim_{R\to\infty}\int_{B(R)}d\mu(a)\,h_q(a,z),\quad (1)$$

где $P_q(z)=V(0)+2\sum z_i\frac{\partial V}{\partial z_i}(0)+\ldots$

$$\ldots+\frac{2}{q!}\left[\sum z_i\frac{\partial V}{\partial z_i}(0)\right]^{(q)}$$ — полином только от z_i степени самое большее q.

Эта теорема может быть применена к целой функции $F(z_1,\ldots,z_n)$ и (1) даст аналогичное представление для $\log|F(z)|$ и мероморфных дифференциалов d_zF (d_z — дифференциал относительно одного z_i) при выполнении условий:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\lambda[\log^+|F(z)|,0,t]}{t^{q+1}}=0\ \text{и}\ \int_1^{\infty}\frac{\nu(t)\,dt}{t^{q+1}}<\infty$$

для целого $q\geqslant 0$ и $F(0)\neq 0$.

Локальное разложение логарифма целой функции конечного порядка было недавно обобщено на случай n переменных Штоллем (РЖМат, 1953, 705). Все результаты в работе приведены без доказательств. При реферировании исправлены опечатки. *А. В. Лебедев*

3685. К теории функций многих комплексных переменных. Об одной полной ортонормальной системе в гиперболическом пространстве прямоугольных матриц. Х у а Л о - г э н (в подлиннике Хуа Ло-кэн), Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 5, 775—777

Пусть $Z(=Z^{(m,n)})$ — прямоугольная $m\times n$ матрица с комплексными компонентами $z_{jk}=x_{jk}+iy_{jk}$ ($j=1,2,\ldots,m$; $k=1,2,\ldots,n$). Множество $\mathfrak{R}$ матриц Z, для которых эрмитова матрица $I^{(n)}-Z\overline{Z}'$ положительно определена, называется гиперболическим пространством $m\times n$ матриц. Рассматривается случай $m=n$. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — два неприводимых представления общей линейной n-мерной группы и пусть a и b — порядки представлений $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ соответственно. Матрице $X(=X^{(n,n)})$ соответствуют матрицы $A(X)$ в $\mathfrak{A}$ и $B(X)$ в $\mathfrak{B}$.

Если $A(X)=(a_{jk}(X))$ и $B(X)=(b_{jk}(X))$ — два неэквивалентных представления, то

$$\int\ldots\int_{\mathfrak{R}}a_{jk}(Z)\,\overline{b_{st}(Z)}\,\dot{Z}=0$$

и

$$\int\ldots\int_{\mathfrak{R}}a_{jk}(Z)\,\overline{a_{st}(Z)}\,\dot{Z}=\begin{cases}0, & \text{если } j\neq s \text{ или } k\neq t;\\ \rho, & \text{если } j=s \text{ и } k=t,\end{cases}$$

где ρ — некоторая константа, не зависящая от j и k, зависящая только от порядка представления a,

$$\dot{Z}=\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{n}dx_{jk}\,dy_{jk}.$$

Если χ — характер представления, то

$$a^2\rho=\int\ldots\int_{\mathfrak{R}}\chi(Z\overline{Z}')\,\dot{Z}.$$

Обозначая через $\chi_{f_1,\ldots,f_n}$ характер представления

$A_{f_1,\ldots,f_n}(Z) = (a_{jk}^{f_1,\ldots,f_n}(Z))$, $1 \leqslant j, k \leqslant N(f_1, \ldots, f_n)$, с сигнатурой $(f_1, \ldots, f_n)$, где $f_1 \geqslant f_2 \geqslant \ldots \geqslant f_n \geqslant 0$— целые числа и $N(f_1, \ldots, f_n)$— порядок представления, для константы $\rho_{f_1,\ldots,f_n}$, отвечающей этому представлению, автор получает следующее выражение:

$$\rho_{f_1,\ldots,f_n} = \frac{\pi^2}{N(f_1, \ldots, f_n)} \prod_{j=1}^{n} \frac{l_j!}{(n+l_j)!},$$

где $l_n = f_n$, $l_{n-1} = f_{n-1} + 1, \ldots, l_1 = f_1 + n - 1$.

Тогда функции $a_{jk}^{f_1,\ldots,f_n} / \rho_{f_1,\ldots,f_n}^{1/2}$ образуют полную ортонормальную систему в пространстве $\mathfrak{R}$.

Далее приводится формула Коши для интеграла, распространенного по характеристическому множеству Σ пространства $\mathfrak{R}$.

В заключение указывается, что полученные результаты могут быть распространены на случай $m \neq n$. Доказательства не приводятся.

А. В. Лебедев

3686. К теории функций многих комплексных переменных. Полная ортонормальная система в гиперболическом пространстве гиперсфер. Хуа Ло-гэн (в подлиннике Хуа Ло-кэн), Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 6, 983—984

Заметка является продолжением предыдущей заметки автора (см. реф. 3685).

Здесь строится полная ортонормальная система в области R, определяемой значениями $z \equiv (z_1, \ldots, z_n)$, удовлетворяющими условиям:

$$|zz'|^2 + 1 - 2\bar{z}z' > 0,$$
$$1 - |zz'|^2 > 0,$$

где $zz' = z_1^2 + \ldots + z_n^2$, $\bar{z}z' = |z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2$, $n \geqslant 2$.

Сначала строится ортонормальная система на действительной гиперсфере $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$.

Пусть T — n-мерная группа вращений. $T^{[m]}$ — симметризованная кронекерова форма m-й степени, N_m — ее порядок представления. $T^{[m]}$ может быть разложено в прямую сумму $T_m + T_{m-2} + \ldots + T_{m-r[m/r]}$, где T_r — некоторая матрица с $[N_r - N_{r-2}]$ рядами.

Тогда, обозначая через

$(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^l \varphi_{m-2l}^{(i)}(x)$, $1 \leqslant i \leqslant N_{m-l} - N_{m-l(l+1)}$,

векторы, к которым применяется T_{m-2l}, устанавливают их ортогональность.

Функции

$$(zz')^l \varphi_{m-2l}^{(j)}(z), \quad 1 \leqslant j \leqslant N_{m-l} - N_{m-l(l+1)},$$

образуют полную нормальную систему в R, которую можно нормировать, как и в предыдущей заметке.

Далее автор получает формулу Коши для R и упоминает о приложении, из которого можно вывести теорему Адамара о трехмерной сфере. Доказательства в заметке не приведены.

А. В. Лебедев

3687. О сопряженных функциях. I. Смирнов В. И., Вестн. Ленингр. гос. ун-та, сер. матем., физ. и химии, 1953, № 3, 3—12

Автор изучает свойства так называемых сопряженных функций $u(M)$ и $v(M)$ точки M некоторой трехмерной области D, т. е. функций, удовлетворяющих в этой области уравнениям

$$(\operatorname{grad} u)^2 = (\operatorname{grad} v)^2, \quad \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = 0,$$

причем в области D имеем $\operatorname{grad} u \neq 0$ и эти функции имеют в области D непрерывные частные производные.

Конгруенцию линий пересечения всех поверхностей $u(M) = \text{const}$, $v(M) = \text{const}$ называют изотропной и соответствующей сопряженным функциям $u(M)$ и $v(M)$. Заметим, что в двумерном случае области D евклидовой плоскости уравнения (1) превращаются в известные уравнения Эйлера —Даламбера, характеризующие моногенность функции $u + iv$ (или $u - iv$) как функции комплексного переменного $x + iy$, так что мы имеем в настоящей работе перенесение понятия моногенной функции на комплексные функции точки трехмерной области. Подобные исследования позволяют находить нужные для анализа и, в частности, для дифференциальной геометрии свойства решений некоторых дифференциальных уравнений с частными производными. Так, например, автор получает, изучая случай прямолинейной изотропной конгруенции, что все функционально-инвариантные решения $t = r + si$ (r, s — действительные функции от x, y и z) уравнения Лапласа

$$\Delta F \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0 \qquad (1)$$

могут быть получены из формулы

$$-i(1 - t^2)x + (1 + t^2)y + 2itz = f(t)$$

при произвольной аналитической $f(t)$ (комплексное решение t уравнения (1) называется функционально-инвариантным, если всякая аналитическая функция от t удовлетворяет тому же уравнению (1)).

Исследуются общие свойства изотропной конгруенции. Хотя такие конгруенции уже изучались Деланом (Delens P., Rend. circ. mat. Palermo, 1932, **56**; Bull. Soc. math. France, 1933, **61**; J. math., 1935, **14**), автор ставит своей целью дать аналитическое изложение вопроса (взамен трудного для читателя сложного геометрического изложения Делана), положив в основу понятие сопряженных функций.

Доказывается, что: 1) если линии изотропной конгруенции ортогональны к некоторому семейству поверхностей, зависящему от одного параметра, то это семейство есть семейство сфер или плоскостей; 2) всякая конгруенция траекторий, ортогональных к семейству сфер или плоскостей, зависящему от одного параметра, есть изотропная, причем в случае семейства плоскостей соответствующие функции $u(M)$ и $v(M)$— гармонические на каждой из этих плоскостей как функции гауссовых координат точки такой плоскости, хотя могут и не быть гармоническими функциями от x, y и z.

Примечание референта. Уместно указать, что, вообще, если данная изотропная кон-

груенция соответствует паре (u, v) сопряженных функций, то для всякой аналитической $f(u+iv)=P+iQ$ (P, Q — действительные) получим ту же изотропную конгруенцию от пересечения поверхностей вида $P=\text{const}$, $Q=\text{const}$, аналогично для $f(u-iv)$. Итак, данной изотропной конгруенции соответствует особый вид аргумента: $u+iv$ (или $u-iv$), всевозможных аналитических функций $f(u+iv)$ (или $f(u-iv)$). Это отмечено автором и было ранее доказано референтом (Изв. АН СССР, сер. матем., 1945, **9**, № 4; доказывается, что это множество функций $f(u\pm iv)$ исчерпывает все множество пар сопряженных функций, соответствующих данной изотропной конгруенции (иначе: образующих эту конгруенцию)). *В. С. Федоров*

3688. **Теория метрических пространств в применении к бесконечно дифференцируемым функциям. Банг** (The theory of metric spaces applied to infinitely differentiable functions. Bang Thøger), Math. scand., 1953, **1**, № 1, 137—152 (англ.)

Пусть $\{m_n\}$ — последовательность положительных чисел, подчиненных условию $m_n^{1/n}\to\infty$; в таком случае существует единственная наибольшая минорантная последовательность $\{m_n^c\}$, обладающая свойством логарифмической выпуклости:

$$m_n^c/m_{n-1}^c\leqslant m_{n+1}^c/m_n^c;$$

при этом $m_n^c=m_n$ для бесконечного множества P значений n (см., например, Mandelbrojt S., Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions, Paris, 1935, **73**). Класс функций $f(x)$, бесконечно дифференцируемых в некотором промежутке I (конечном или бесконечном), можно рассматривать как метрическое пространство, если в нем ввести норму:

$$\|f\|_x=\inf_{p\in P}\left\{\max\left[e^{-p},\ \max_{0\leqslant n\leqslant p}\frac{|f^{(n)}(x)|}{e^n m_n^c}\right]\right\}.$$

Теорема I. В предположении, что $\sup_{x\in I}|f^{(n)}(x)|\leqslant m_n$, из неравенства $\|f\|_x\geqslant e^{-q}$ (где q — целое положительное) следует:

$$\|f\|_{x+h}\leqslant\|f\|_x\exp\left(e|h|\,\frac{m_q^c}{m_{q+1}^c}\right).$$

Отсюда выводится достаточность следующего условия принадлежности функции к квазианалитическому классу Данжуа — Карлемана:

$$\sum_{n=0}^{\infty}m_n^c/m_{n+1}^c=\infty. \qquad (1)$$

Если условие (1) выполнено, возникает возможность построения квазианалитической функции по заданному ее элементу $\{f^{(n)}(a)\}$. Предлагаемый автором процесс построения характеризуется следующим утверждением (в дальнейшем допущено, что $m_n=m_n^c$ при всех n, и P — множество всех целых неотрицательных чисел):

Теорема II. Предполагая заданным целое положительное число N, введем точки:

$$x_N=a$$
$$x_{N-1}=x_N+m_{N-1}/(em_N)$$
$$x_{N-2}=x_{N-1}+m_{N-2}/(em_{N-1})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

В промежутке (x_N, x_{N-1}) мы берем полином $S_N(x)$ степени $<N$, для которого

$$S_N^{(n)}(x_N)=f^{(n)}(x_N)\ (0\leqslant n\leqslant N-1);$$

в промежутке (x_{N-1}, x_{N-2}) — полином $S_{N-1}(x)$, степени $<N-1$, для которого

$$S_{N-1}^{(n)}(x_{N-1})=S_N^{(n)}(x_{N-1})\ (0\leqslant n\leqslant N-2),$$

и т. д. Функция $S(x)$, составленная из этих полиномов, при $N\to\infty$ стремится к $f(x)$. Это утверждение распространяется и на последующие производные. Сходимость — равномерная относительно x во всяком конечном промежутке, лежащем внутри рассматриваемого промежутка.

Еще раз опираясь на теорию метрических пространств, автор получает неравенство

$$\sum_{j=1}^{q}|x_{j-1}-x_j|>\frac{1}{e}\sum_{j=1}^{q}\frac{m_{j-1}}{m_j}-\text{const}. \qquad (2)$$

Здесь x_k обозначает некоторый нуль производной $f^{(k)}(x)$ (допускается, что таковой существует; $k=0, 1, 2, \ldots$).

Отсюда следует:

Теорема III. Если $f(x)$ — квазианалитическая функция ($\not\equiv 0$), причем $f^{(k)}(x_k)=0$ $(k\geqslant 0)$, то ряд $\sum|x_{j-1}-x_j|$ — расходящийся.

(Для случая аналитической функции это было ранее установлено референтом (Ann. scient. École norm. supér., 1930, **47**, 1—78)).

Как следствие устанавливается справедливость предложения, высказанного Э. Борелем в качестве гипотезы: «Если все производные квазианалитической функции положительны в данной точке, то эта функция является аналитической» (C. r. Acad. sci., 1923, **176**, 66).

Из (2) вытекает:

Теорема IV. Если $f(x)$ принадлежит квазианалитическому классу, определяемому неравенствами $|f^{(n)}(x)|\leqslant CK^n m_n$ $(n\geqslant 0)$, то

$$\inf_q\frac{\sum_{j=1}^{q}|x_{j-1}-x|}{\sum_{n=1}^{q}m_{n-1}/m_n}>0.$$

(При $m_n=(n!)^\alpha$, $0<\alpha<1$, получаются теоремы по поводу корней последовательных производных, приведенные В. Л. Гончаровым в цитированной выше работе, гл. III).

С привлечением теоремы Ролля, из того же

неравенства (2) автор выводит еще одно следствие, касающееся нулей самой функции $f(x)$:

Теорема V. Если квазианалитическая функция $f(x)$ $(\not\equiv 0; |f^{(n)}(x)| \leqslant m_n)$ имеет нули $z_0 < z_1 < z_2 < \ldots$, то

$$z_q > \frac{1}{e} \sum_{j=1}^{q} \frac{m_{j-1}}{m_j} - \text{const}.$$

Теоремы такого же типа, как указывает автор, были получены Хиршманом (Hirschman I. I., Amer. J. Math., 1950, **72**, 396—406).

Отметим еще следующее предложение, ограничивающее рост числа нулей n-й производной $f^{(n)}(x)$ в рассматриваемом промежутке:

Теорема VI. При тех же предположениях, что и в теореме V, число нулей N_n производной $f^{(n)}(x)$ в промежутке длины l удовлетворяет неравенству

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=n+1}^{n+N_n} m_{j-1} / m_j \leqslant el$$

[частные случаи — у Пойа (Pòlya G., Bull. Amer. Math. Soc., 1943, **49**, 178—191)]. *В. Л. Гончаров*

3689 РЕЦ. Собрание сочинений, Т. I. Метрическая теория функций и теория функций комплексного переменного. Лузин Н. Н., 400 стр., Изд-во АН СССР, М., 1953, 22 р. [Рецензия: **Ляпунов А. А.,** Вестн. АН СССР, 1954, № 1, 126—127)

См. также: 3596, 3598, 3703, 3704, 3722, 3743

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3690. Особенности канонических уравнений динамики. Никитин А. К., Уч. зап. Ростовского ун-та, Тр. физ.-матем. фак-та, 1953, **18**, № 3, 43—48

Рассматриваются канонические уравнения $\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ как характеристики уравнения с частными производными:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, q_1, \ldots, q_n, t\right) = 0$$

в предположении, что функция H является голоморфной в окрестности точки M_0 $(p_i = q_i = t = 0)$. Изучаются особенности характеристик в четырех случаях:

1) $\frac{\partial H}{\partial p_i} \neq 0$, $\frac{\partial H}{\partial q_i} \neq 0$, 2) $\frac{\partial H}{\partial p_i} = 0$, $\frac{\partial H}{\partial q_i} \neq 0$;

3) $\frac{\partial H}{\partial p_i} \neq 0$, $\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$; 4) $\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$.

В случаях 1) и 3) точка M_0 является обыкновенной. В случае 2) M_0 — точка возврата характеристик, а в случае 4) точка M_0 особая, не являющаяся, однако, решением канонических уравнений.

Вводится дискриминантная поверхность (геометрическое место точек, в которых обобщенная скорость равна нулю) и утверждается, что все точки возврата характеристик лежат на этой поверхности. Кроме того, вычислено значение действия S на дискриминантной поверхности. *И. С. Аржаных*

3691. Нахождение конечных решений для линейных дифференциальных уравнений специального вида. Латышева К. Я., Наукові зап. Київськ. держ. ун-та, 1953, **12**, № 6, 95—100

Рассматривается вопрос о существовании конечных решений вида

$$y = x^{\alpha}(C_0 + C_1 x + \ldots + C_q x^q)$$

уравнения

$$x^2(a_0 + a_1 x)y'' + x(b_0 + b_1 x)y' + (c_0 + c_1 x)y = 0.$$

Получены необходимое, а также некоторые достаточные условия существования таких решений и указан способ их построения. *Л. И. Донская*

3692. Об одной теореме Кнезера. Хукухара (Sur un théorème de Kneser. Hukuhara Masuo), J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, 1953, Sec. I, **6**, 329—344

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Обозначим чарез Ω множество, определенное неравенствами

$$a \leqslant x < a', \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 < \infty. \tag{2}$$

Пусть далее E — замкнутое в Ω подмножество Ω. Обозначим через A некоторый континуум, лежащий в E, и через $R(A)$ — множество точек, лежащих на интегральных кривых системы (1), проходящих через точки A. Наконец, пусть $S_\xi(A)$ обозначает пересечение $R(A)$ плоскостью $x = \xi$ $(a < \xi < a')$. Вводим такое определение: семейство решений системы (1) обладает свойством Кнезера (справа), если для любого ξ, лежащего справа от a, множество S_ξ есть континуум. В предположении, что правые части системы (1) ограничены и непрерывны на E, автор получает достаточные условия для того, чтобы семейство решений системы (1) обладало свой-

ством Кнезера (справа). Эти условия столь сложны, что мы их не приводим. В работе обобщаются также результаты Кнезера (Kneser H., Sitzungsber., Preuss. Akad. Wiss., Phys.-math. Kl., 1923, **21**, 171—174), которые относятся к случаю, когда E есть замыкание Ω. *Pome* (*E. H. Rothe*)

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 10, 981.

3693. Об одном случае почти периодичности решения обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка. Демидович Б. П., Успехи матем. наук, 1953, **8**, № 6(58), 103—106

Доказывается теорема:

Если $f(x)$ — монотонная функция с непрерывной производной $f'(x)$ и $g(t)$ — непрерывная почти периодическая функция с ограниченным интегралом

$$G(t) = \int_0^t g(t_1)\, dt_1,$$

то всякое ограниченное решение уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(t) \qquad (1)$$

есть также почти периодическое.

Автор отмечает, что тем же методом может быть доказана теорема: Пусть дано уравнение

$$\frac{dx}{dt} = F(x, g(t)), \qquad (2)$$

где $g(t)$ — непрерывная почти периодическая функция и $F(x, y)$ — функция, непрерывная вместе со своими частными производными первого порядка в замкнутой полосе

$$A\{-\infty < x < \infty,\ \inf g(t) \leqslant y \leqslant \sup g(t)\},$$

причем $F'_x(x, y)$ не меняет своего знака и $F'_y(x, y)$ ограничена в области A, тогда всякое ограниченное решение (2) будет почти периодическим.

С. А. Самедова

3694. Некоторые критерии устойчивости. Шефке (Einige Stabilitätskriterien. Schäfke Friedrich W.), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 8—9, 283—285 (нем.)

Исследуется ограниченность решений дифференциального уравнения

$$y'' + f(x)\, y = 0, \qquad (1)$$

где $f(x)$ — непрерывная на всей действительной оси периодическая с периодом π функция, отличная от постоянной. Установлены следующие критерии:

1. Решения уравнения (1) ограничены, если существует такая действительная постоянная α, что одновременно выполнены неравенства:

$$f(x) \geqslant \alpha^2;\ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\, dx \leqslant \alpha^2 + \frac{2(n+1)\alpha}{\pi}\operatorname{ctg}\frac{\alpha\pi}{2(n+1)}.$$

Целое неотрицательное число n определяется соотношением

$$n^2 \leqslant \alpha^2 \leqslant (n+1)^2.$$

2. Решения уравнения (1) ограничены, если существует такая действительная постоянная α, что одновременно выполнены неравенства:

$$f(x) \leqslant \alpha^2,\ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\, dx \geqslant n\alpha.$$

Целое неотрицательное число n определяется соотношением

$$n^2 < \alpha^2 \leqslant (n+1)^2.$$

Оба указанных критерия вытекают из более общих критериев, данных в работе В. А. Якубовича (Докл. АН СССР, 1950, **74**, № 5, 901); см. также ряд работ Р. С. Гусаровой в журнале «Прикл. математика и механика». *И. И. Ворович*

3695. Об устойчивости установившегося движения канонической системы. Никитин А. К., Уч. зап. Ростовского ун-та, Тр. физ.-матем. фак-та, 1953, **18**, № 3, 49—54

Исследуется устойчивость в случае, когда уравнения возмущенного движения могут быть приведены к виду

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i},\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$H = \sum_{k=1}^{j}\frac{\lambda_k}{2}(p_k^2 + q_k^2) - \sum_{s=j+1}^{m}\frac{}{2}(p_s^2 + q_s^2) + H_3(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n),$$

H_3 — аналитическая функция, разложение которой начинается членами не ниже третьего порядка, и $n - m \geqslant 0$, $\lambda_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Показывается, что если уравнения допускают первый интеграл вида

$$V = \sum_{s=j+1}^{n}(q_s^2 + p_s^2)$$

или вида

$$V = \sum_{k=1}^{j}(q_k^2 + p_k^2) + \sum_{r=m+1}^{n}(q_r^2 + p_r^2),$$

то движение устойчиво. Рассматриваются также некоторые частные случаи этого предложения.

И. Г. Малкин

3696. О вероятностной трактовке понятия «устойчивость движения». Моисеев Н. Н., Уч. зап. Ростовского ун-та, Тр. физ.-матем. фак-та, 1953, **18**, № 3, 79—82

Автор предлагает следующим образом ввести понятие устойчивости движения. Пусть

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n)$$

$$(s = 1, \ldots, n;\ X_s(t, 0, \ldots, 0) = 0)$$

— дифференциальные уравнения возмущенного движения. Наряду с этими уравнениями рассматри-

ваются уравнения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s + F_s(t),$$

где F_s — случайные функции времени с известным математическим ожиданием (принимаемым равным нулю) и с известными корреляционными функциями $K_{F_iF_j}(t_1, t_2)$. Начальные значения x_s^0 величин x_s считаются случайными величинами с известным математическим ожиданием (принимаемым равным нулю). Пусть $(\overline{x_s^0})^2$ и $\overline{x_s^2}$ — дисперсии величин x_s^0 и x_s. Автор предлагает считать невозмущенное движение обладающим вероятностной устойчивостью, если для любого $\varepsilon > 0$ и $t \geqslant t_0 > 0$ можно найти такие числа δ и η, что при $t > t_0$ выполняются неравенства $\overline{x_s^2} < \varepsilon$, коль скоро $(\overline{x_s^0})^2 < \delta$, $|K_{F_iF_j}| < \eta$. Определение иллюстрируется на простейшем примере, когда уравнения возмущенного движения линейны и не зависят от t. *И. Г. Малкин*

3697. Проблема граничного слоя для некоторого нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения. Бергман (The boundary layer problem for certain non-linear ordinary differential equations. Bergmann Howard G.), Compositio math., 1953, **11**, № 2, 119—169 (англ.)

Рассматривается встречающаяся в теории изгиба круглой пластинки нелинейная система, зависящая от малого неотрицательного параметра k:

$$p_{xx} = \frac{1}{2} q^2, \quad kq_{xx} + pq = 0, \tag{1}$$

где искомые функции

$$p = p^k(x), \quad q = q^k(x) \tag{2}$$

определены на сегменте $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и удовлетворяют линейным однородным граничным условиям:

$$p(-1) = p_1, \quad p(1) = p_2, \quad q_x(-1) = 0, \quad q_x(1) = 0. \tag{3}$$

Существование и единственность (с точностью до знака функции q) решений (2) при $k > 0$ доказываются методами вариационного исчисления.

Далее исследуется асимптотическое поведение функций (2) при $k \to +0$. Доказывается что:

1) равномерно на каждом внутреннем сегменте $[x_-, x_+] \subset [-1, 1]$ имеют место предельные соотношения:

$$\lim_{k \to +0} p^k(x) = p^0(x), \quad \lim_{k \to +0} q^k(x) = q^0(x),$$

где

$$p^0(x) = \frac{1}{2}[(p_1^0 + p_2^0)x - (p_1^0 - p_2^0)]$$

и $q^0(x) = 0$ (p_1^0 и p_2^0 — постоянные) — решение предельной системы:

$$p_{xx} = \frac{1}{2} q^2, \quad pq = 0.$$

2) На концах $x = \mp 1$ («граничный слой») справедливы соотношения $p_i^0 = p_i$ $(i = 1, 2)$, если $p_i < 0$, и $p_i^0 = cp_i$, где $c = -0{,}47271\ldots$ — корень некоторого трансцендентного уравнения, если $p_i > 0$. Что касается граничных условий для $q^0(x)$, понимаемых в смысле пределов изнутри при приближении к концам сегмента $x = \mp 1$ предельных значений производных $q_x^k(x)$ при $k \to +0$, то они остаются совершенно произвольными.

Результаты автора являются обобщением задачи, изученной Фридрихсом и Стокером (Fridrichs K. O., Stoker J. J., Amer. J. Math., 1941, **63**, № 4, 839—888). *Б. П. Демидович*

3698. О гиперкомплексных системах, построенных по уравнению Штурма-Лиувилля на полуоси. Березанский Ю. М., Докл. АН СССР, 1953, **91**, № 6, 1245—1248

В работе референта (Матем. сб., 1948), **23(65)**, № 1, 3—52) были введены кольца суммируемых функций, связанные с уравнением $y'' - q(t)y = -\lambda y$ $(0 \leqslant t < \infty)$, при условиях $q(t) = O\left(\frac{1}{t^{\alpha+\varepsilon}}\right)$ $(\alpha = 2, 3;\ \varepsilon > 0)$.

Автор обобщает результаты референта при предположении, что $q(t)$ имеет ограниченную вариацию на $(0, \infty)$. Пусть

$$\tilde{q}(t) = \operatorname*{Var}_t^{\infty} q \quad \text{и} \quad \mu'' - \tilde{q}(t)\mu = 0, \ \mu(0) = 1, \ \mu'(0) = 0.$$

Образуем пространство $L_1(0, \infty; \mu)$ функций с нормой

$$\|x\| = \int_0^\infty |x(t)| \mu(t)\, dt.$$

Положим для $x,\ y \subset L_1(0, \infty; \mu)$

$$(x * y)(t) = \int_0^\infty (T_s x)(t)\, y(s)\, ds,$$

где $(T_s x)(t)$ есть решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - q(s)u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - q(t)u$$

во всем пространстве (s, t) при условиях $u(s, 0) = x(s)$, $u_t(s, 0) = 0$, а функции $q(s)$, $q(t)$, $x(t)$ продолжены четно на отрицательную часть полуоси. Основным результатом автора является теорема о том, что $L_1(0, \infty; \mu)$ является относительно таким образом определенной операции умножения $x * y$ коммутативным нормированным кольцом. В работе исследована структура максимальных идеалов построенного кольца. Результаты аналогичны соответствующим результатам в указанной работе референта. При условии, что $\tilde{q}(t) = o(1)$, доказана также теорема, обобщающая аппроксимационную теорему Винера. Для случая $q(t) = O\left(\frac{1}{t^{\alpha+\varepsilon}}\right)$ $(\varepsilon > 0,\ \alpha = 2, 3)$ подобная теорема установлена в работе З. С. Аграновича (Докл. АН СССР, 1949, **66**, № 6, 1025—1028). *А. Я. Повзнер*

3699. Линейное дифференциальное уравнение на бесконечном в обе стороны интервале при начальных и граничных условиях. Дё ч (Die

lineare Differentialgleichung im zweiseitig unendlichen Intervall unter Anfangs- und Randbedingungen. Doetsch Gustav), Math. Ann., 1953, **126**, № 4, 307—324 (нем.)

Предельные задачи для уравнения

$$Y^{(n)} + c_{n-1} Y^{(n-1)} + \ldots + c_0 Y = F(t), \quad -\infty < t < +\infty, \tag{1}$$

заданного на всей прямой, с постоянными действительными коэффициентами и непрерывной $F(t)$ имеют следующие особенности: 1) «начальные» значения (в $-\infty$) могут быть только такими:

$$Y(-\infty) = \text{произвольному числу } a_0,$$

$$Y'(-\infty) = \ldots = Y^{(n-1)}(-\infty) = 0; \tag{2}$$

2) решение однородного уравнения этими значениями, вообще говоря, однозначно не определяется; 3) двусторонними граничными значениями

$$Y(-\infty) = A,\ Y(+\infty) = B \tag{3}$$

решение однородного уравнения определяется однозначно (под «значениями» всюду понимаются только конечные числа).

Посредством двустороннего преобразования Лапласа в предположении простоты всех корней $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ характеристического уравнения $p(s) \equiv s^n + \ldots + c_0 = 0$ решаются две задачи: (1), (2) или (1), (3), каждая в двух вариантах: при условии существования значений $F(-\infty)$, $F(+\infty)$ или при условии

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(t)|\, dt < +\infty. \tag{4}$$

Приведем один из соответствующих четырех результатов: задача (1), (2), (4) с $a_0 = 0$ имеет общее решение

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Q(t-\tau) F(\tau)\, d\tau + \sum_{\mathrm{Re}\,\alpha_\mu > 0} k_\mu e^{\alpha_\mu t} = Y_0(t) + \sum_{\mathrm{Re}\,\alpha_\mu > 0} k_\mu e^{\alpha_\mu t}$$

с произвольными k_μ и с функцией Грина

$$Q(t) = \begin{cases} \sum\limits_{\mathrm{Re}\,\alpha_\mu \leqslant 0} \dfrac{1}{p'(\alpha_\mu)} e^{\alpha_\mu t}, & t > 0, \\ -\sum\limits_{\mathrm{Re}\,\alpha_\mu > 0} \dfrac{1}{p'(\alpha_\mu)} e^{\alpha_\mu t}, & t < 0; \end{cases}$$

$Y_0(+\infty)$ существует, вообще говоря, лишь при отсутствии чисто мнимых α_μ и тогда

$$Y_0(+\infty) = \begin{cases} \dfrac{1}{p'(0)} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\, dt & \text{при } c_0 = 0, \\ 0 & \text{при } c_0 \neq 0 \end{cases}$$

М. К. Фаге

3700 **РЕЦ.** **Дифференциальные уравнения.** **Йейтс** (Differential equations. Yates R. C., VI+215 pp., McGraw-Hill Book Co., New York—Toronto—London, 1952) [**Рецензия:** **Прахар** (Prachar K.), Monatsh. Math., 1953, **57**, № 3, 259 (нем.)]

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

3701. О собственных функциях и собственных значениях общего линейного эллиптического дифференциального оператора. Браудер (On the eigenfunctions and eigenvalues of the general linear elliptic differential operator. Browder Felix E.), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1953, **39**, № 5, 433—439 (англ.)

Пусть D — ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве E^n и $C^{2m}(D)$ — совокупность функций, $2m$ раз непрерывно дифференцируемых в D, $C_c^{2m}(D)$ — совокупность всех функций из $C^{2m}(D)$, равных нулю вне компактного подмножества в D, и пусть для $f,\ g \in C_c^{2m}(D)$

$$(f, g)_m = \int_D \left\{ \sum_{i_1 \ldots i_m} \frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}} \frac{\partial^m \bar{g}}{\partial x_{i_1} \ldots dx_{i_m}} \right\} dx,$$

а $H_m(D)$ — замыкание множества $C_c^{2m}(D)$ относительно скалярного произведения $(f, g)_m$; можно считать, что $H_m(D) \subset L_2(D)$.

Пусть далее K — линейный эллиптический оператор в D порядка $2m$, вообще несамосопряженный, B — самосопряженный дифференциальный оператор порядка $2s$, $s < m$; автор называет B оператором определенного знака, если при некотором $\rho > 0$ будет $\int_D Bf \cdot \bar{f}\, dx \geqslant \rho (f, f)_s$ для всех $f \in C_c^{2m}(D)$ или $\int_D Bf \cdot \bar{f}\, dx \leqslant -\rho (f, f)_s$ для всех $f \in C_c^{2m}(D)$. Функцию $\varphi \in C^{2m}(D) \cap H_m(D)$ автор называет B-собственной функцией первого порядка оператора K, отвечающей его B-собственному значению λ, если $K\varphi - \lambda B\varphi = 0$; аналогично B-собственная функция n-го порядка, отвечающая λ, определяется условием $K\varphi - \lambda B\varphi = B\psi$, где ψ есть B-собственная функция $(n-1)$-го порядка.

Автор показывает, что если: 1) коэффициенты операторов K и B достаточное число раз дифференцируемы, 2) B — оператор определенного знака, 3) при $4m - 2s \leqslant n$ граница области D есть $(n-1)$-мерное многообразие класса C^{2m}, $2m$ раз непрерывно дифференцируемым образом вкладываемое в E^n, то B-собственные функции всех порядков оператора K, отвечающие его всевозможным B-собственным значениям, образуют полную систему в $H_m(D)$, а значит, и в $L_2(D)$.

Кроме того, при $2m > n$ эта система полна в $L_p(D)$ при любом p, а при $2m \leqslant n$ она полна в $L_p(D)$ при $p \leqslant \dfrac{2n}{n-2m}$ (∞ при $n = 2m$).

Если далее $K = L + A$, где L — самосопряженный оператор, а A — оператор порядка $q < 2m$, то существуют $\xi_0 > 0$, $c > 0$ такие, что при $\int_D Bf \cdot \bar{f}\, dx \geqslant$ $\geqslant \rho(f, f)_s$ B-собственные значения $\lambda_k = \xi_k + i\eta_k$ оператора K удовлетворяют соотношениям:

$$(-1)^m \xi_k \to +\infty;\ |\eta_k| \leqslant c\{(-1)^m \xi_k + \xi_0\}^{\frac{q-2s}{2m-2s}}$$

при $q > 2s$, $|\eta_k| \leqslant c$ при $q \leqslant 2s$.

Повидимому, автору неизвестна статья М. В. Келдыша (Докл. АН СССР, 1951, **77**, № 1, 11—14), в которой для случая пространства $L_2(D)$ получены более общие результаты. *М. А. Наймарк*

3702. Граничная задача с косой производной для уравнения эллиптического типа. Векуа И. Н., Докл. АН СССР, 1953, **92**, № 6, 1113—1116

Исследована следующая граничная задача («задача $A(\lambda, \mu)$»): Требуется определить регулярное в плоской односвязной области T решение уравнения

$$\Delta w + aw_x + bw_y + \lambda cw = f,$$

удовлетворяющее на границе L области T условию

$$\alpha w_x + \beta w_y + \mu\gamma w = \delta,$$

где a, b, c, f — заданные вещественные непрерывные функции точки $x + iy = z \in \bar{T}$; α, β, γ, δ — заданные вещественные функции точки кривой L, удовлетворяющие условию Гёльдера, причем $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$; λ и μ — постоянные параметры. Решение понимается в обобщенном смысле (Векуа И. Н., Матем. сб., 1952, **31** (**73**), № 2, 217—314).

Эта задача является частным случаем общей линейной граничной задачи, исследованной автором ранее (Новые методы решения эллиптических уравнений, М.— Л., 1948) для случая линейных эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами. В настоящей работе автору удалось освободиться от предположения аналитичности коэффициентов. Исследование проводится при помощи приведения задачи к интегральным уравнениям типа Фредгольма. Случай $\lambda = \mu = 0$ был исследован автором ранее (Матем. сб., 1952, **31** (**73**), № 2, 217—314).

В работе установлены простые признаки разрешимости задачи $A(\lambda, \mu)$. Установлено, что число решений однородной задачи $A^0(\lambda, \mu)$ и число условий разрешимости задачи $A(\lambda, \mu)$ зависят от индекса n задачи, равного приращению функции $\frac{1}{2\pi} \arg[\alpha(t) - i\beta(t)]$ при обходе кривой L в положительном направлении.

В случае $n \geqslant 0$ однородная задача $A^0(\lambda, \mu)$ ($f = \delta = 0$) имеет $N = 2n + 2 + p - r$ решений, где $0 \leqslant r \leqslant \min(p, 2n + 2)$, p — число решений соответствующего однородного интегрального уравнения; при $N = 2n + 2$ ($p = r$) задача $A^0(\lambda, \mu)$ имеет $2n + 2$ решений, а неоднородная задача $A(\lambda, \mu)$ всегда разрешима. При $N > 2n + 2$ задача $A(\lambda, \mu)$ имеет решение лишь при соблюдении $N - 2n - 2$ условий вида

$$\iint_T f(t)\, G_j(t)\, dT + \int_L \delta g_j ds = 0, \quad j = 1, \ldots, N - 2n - 2,$$

где G_j и g_j зависят исключительно от a, b, c, α, β, γ, λ, μ, но не зависят от f и δ. При достаточно малых λ и μ задача $A(\lambda, \mu)$ всегда разрешима, а задача $A^0(\lambda, \mu)$ имеет ровно $2n + 2$ решений.

В случае $n < 0$ задача $A(\lambda, \mu)$ эквивалентна одному интегральному уравнению Фредгольма второго рода и $(-2n - 1)$ интегральным равенствам. И в этом случае при соблюдении конечного числа интегральных условий задача $A(\lambda, \mu)$ разрешима. В частности, неоднородная задача $A(\lambda, \mu)$ разрешима при любых непрерывных f и δ тогда и только тогда, когда индекс $n = -1$ и однородная задача $A^0(\lambda, \mu)$ не имеет решения, кроме тривиального. *А. В. Бицадзе*

3703. О получении решений бигармонического уравнения на плоскости конформными отображениями. Лёвнер (On generation of solutions of the biharmonic equation in the plane by conformal mappings. Loewner Charles), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 2, 417—436 (англ.)

Известно, что преобразование подобия комплексной плоскости $z = x + iy$ оставляет инвариантным бигармоническое уравнение

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0. \tag{1}$$

Для получения более общих преобразований, относительно которых (1) инвариантно, автор рассматривает преобразования вида

$$\begin{aligned} z' &= \omega(z) \\ u' &= \chi(z)\, u, \end{aligned} \tag{2}$$

где первое соотношение определяет преобразование плоскости z, а второе, в котором $\chi(z)$ — действительная функция, определяет преобразованную функцию u'. Доказывается, что преобразование вида (2), если ω и χ четыре раза непрерывно дифференцируемы по x и y, отображает любую бигармоническую функцию u в бигармоническую функцию u' тогда и только тогда, когда

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad u' = k\left|\frac{dz'}{dz}\right| u$$

или

$$z' = \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta}, \qquad u' = k\left|\frac{dz'}{d\bar{z}}\right| u,$$

где α, β, γ, δ, k — произвольные постоянные $\left(\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0,\ k \neq 0,\ k \text{ действительно}\right)$.

Несмотря на то что уравнение (1) инвариантно относительно преобразований плоскости только при преобразованиях подобия, автор показывает, что для каждой индивидуальной бигармонической функции u, вообще говоря, существует однопараметрическое семейство конформных преобразований, не представляющих подобного преобразования и оставляющих функцию u бигармонической.

Далее исследуется вопрос о знаке бигармонической функции Грина $\left(\text{с граничными условиями } u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0\right)$ и доказывается существование таких

областей, бигармоническая функция Грина которых знакопеременна. Кроме того, доказывается, что предположение о положительности бигармонической функции Грина $\Gamma(z)$ с полярностью на бесконечности в области, внешней к некоторой выпуклой кривой, эквивалентно положительности всюду в этой области гармонической функции $\Delta\Gamma$, где Δ — оператор Лапласа. *И. Н. Карцивадзе*

3704. Замечание к предшествующей статье Чарльза Лёвнера. Сегё (Remark on the preceding paper of Charles Loewner. Szegö G.), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 3, 437—446 (англ.)

Приведены примеры областей, бигармоническая функция Грина которых $\left(\text{с граничными условиями } u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0\right)$ знакопеременна в области. Примером такой области служит плоскость комплексной переменной $z = re^{i\varphi}$, разрезанная вдоль дуги единичной окружности:

$$r = 1,\ \pi - \alpha \leqslant \varphi \leqslant \pi + \alpha \quad (0 < \alpha < \pi).$$

В частности, доказывается, что бигармоническая функция Грина этой области с особенностью на бесконечности положительна вблизи границы со стороны выпуклости и отрицательна вблизи разреза со стороны вогнутости.

Функция

$$z = \frac{\zeta(\lambda\zeta - 1)}{\zeta - \lambda},$$

где $\lambda = \sin\frac{\alpha}{2}$, однолистно отображает область $|\zeta| > 1$ на плоскость z, разрезанную вдоль вышеуказанной дуги единичной окружности, причем так, что $\zeta = \infty$ соответствует $z = \infty$. Если при этом C_R обозначает образ окружности $|\zeta| = R\ (R > 1)$, то, как доказывается в статье, бигармоническая функция Грина с особенностью в точке $z = \infty$ области, внешней к C_R, также знакопеременна, если только R достаточно близко к единице.

Другие примеры областей со знакопеременной функцией Грина могут быть получены путем применения преобразования инверсии вида

$$v(r, \varphi) = r^2 u\left(\frac{1}{r}, \varphi\right),$$

где r обозначает расстояние от точки z до некоторой внутренней к C_R фиксированной точки.

И. Н. Карцивадзе

3705. О разрывах производных решений квазилинейной гиперболической системы дифференциальных уравнений. Ниче (Über Unstetigkeiten in den Ableitungen von Lösungen quasilinearer hyperbolischer Differentialgleichungssysteme. Nitsche Johannes), J. Rational. Mech. and Analysis, 1953, **2**, № 2, 291—297 (нем.)

Для квазилинейной системы двух уравнений первого порядка с двумя функциями и двумя аргументами изучается характер слабых разрывов решений. Доказывается, что если терпит разрыв первая производная одной из функций (линией разрыва должна быть характеристика), то величина этого разрыва вдоль линии разрыва удовлетворяет однородному уравнению Рикатти и потому может при приближении к некоторым точкам этой линии безгранично расти. Если же терпит разрыв какая-либо производная выше первого порядка, то величина ее разрыва удовлетворяет однородному линейному уравнению первого порядка и, следовательно, не может обратиться ни в какой точке линии разрыва ни в нуль, ни в бесконечность. *О. А. Ладыженская*

3706. Об одном особом классе вторых краевых задач. Лески (Über eine besondere Klasse von zweiten Randwertaufgaben. Lesky P.), Österr. Ingr-Arch., 1953, **7**, № 3, 231—236 (нем.; резюме англ., франц.)

Рассматривается частный случай задачи об отыскании функции, гармонической в плоской области, если на контуре задана производная по направлению, непрерывно зависящему от точки контура и попеременно указывающему то внутрь, то наружу области. Именно в качестве области берется эллипс $x^2 + y^2 q^{-2} = 1\ (0 < q \leqslant 1)$, а направление дифференцирования выбирается так, чтобы внешняя нормаль к контуру делила угол между ним и положительным направлением оси x пополам. После перехода к эллиптическим координатам ρ, ϑ по формулам $(\rho_0 = \sqrt{(1-q)(1+q)^{-1}})$

$$2x = [(1+q)\rho + (1-q)\rho^{-1}]\cos\theta,$$
$$2y = [(1+q)\rho - (1-q)\rho^{-1}]\sin\theta$$
$$(0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi,\ \rho_0 \leqslant \rho \leqslant 1)$$

решение ищется в виде

$$\frac{a_0(\rho)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k(\rho)\cos k\vartheta + b_k(\rho)\sin k\vartheta].$$

Из условия удовлетворения уравнения получается тогда (формально), что

$$a_0(\rho) = A_0,\ a_k(\rho) = A_k(\rho^k + \rho_0^{2k}\rho^{-k}),$$
$$b_k(\rho) = C_k(\rho^k - \rho_0^{2k}\rho^{-k}),$$

а из (также формального) гармонического анализа краевого условия получаются бесконечные последовательности линейных соотношений между неизвестными коэффициентами A_k и C_k. Из этих соотношений искомые коэффициенты находятся совсем просто в случае круга $(q = 1)$ и несколько сложней (в виде сумм рядов) при $0 < q < 1$. Для возможности определения этих коэффициентов функция $F(\vartheta)$, которой по краевому условию равна заданная на контуре производная, должна удовлетворять трем соотношениям (обращать в нуль три определенных интеграла); в случае круга эти соотношения имеют вид

$$\int_0^{2\pi} F(\vartheta)\,d\vartheta = 0,\quad \int_0^{2\pi} F(\vartheta)\cos\vartheta\,d\vartheta = 0,\quad \int_0^{2\pi} F(\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta = 0.$$

Константа A_0 остается произвольной. Обоснование решения для круга см. в статье Платоне (Platone M. G., Ann. Scuola norm. sup. Pisa, 1951, сер. 3, 5, № 1—2, 57—70) для эллипса — в статье автора (Ann. Scuola norm. sup. Pisa, 1952, сер. 3, **6**, № 3—4, 255—267). Встречаются опечатки.

А. Д. Мышкис

Примечание редакции. Рассмотренная в работе задача может быть сформулирована еще так: Требуется отыскать в области T голоморфную функцию $f(z)$ по граничному условию

$$\operatorname{Re}\left[f'(z)\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right] = F(s), \quad z = x + iy.$$

Эта задача представляет собой частный случай задачи Римана для аналитических функций, которая в настоящее время изучена весьма полно (см., например, Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, Гостехиздат, М, 1946).

3707. Об одном случае решения для полуполосы уравнения $\Delta^*\Delta^* w(x, y) = f(x, y)$. Москвичев А. Д., Сб. научн. тр. Куйбышевского индустр. ин-та, 1953, № 4, 13—19

Рассматривается уравнение

$$\Delta^*\Delta^* w(x, y) = f(x, y), \tag{1}$$

где Δ^* — обобщенный оператор Лапласа:

$$\Delta^* u(x, y) = \lim_{h\to 0}\left\{\left[\frac{1}{\pi h^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{h} u(x + \rho\cos\vartheta, y + \rho\sin\vartheta)\,\rho\,d\rho\,d\vartheta - u(x, y)\right] : \frac{h^2}{8}\right\}$$

(как известно, если функция имеет непрерывные частные производные второго порядка, то она допускает обобщенный оператор Лапласа, равный обыкновенному дифференциальному оператору Лапласа). В работе решается следующая граничная задача для уравнения (1).

Найти функцию $w(x, y)$, непрерывную вместе с частными производными до второго порядка в области

$$0 \leqslant x < \infty, \quad 0 \leqslant y \leqslant b$$

и удовлетворяющую краевым условиям:

$$w = 0, \ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ при } y = 0, \ y = b,$$

$$w = 0, \ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} w = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Функция $f(x, y)$ предполагается непрерывной в полуполосе

$$0 \leqslant x, \ 0 \leqslant y \leqslant b$$

и представимой в виде интеграла Фурье

$$f(x, y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \varphi(t, y)\sin tx\,dt.$$

Такая же граничная задача для уравнения

$$\Delta\Delta w(x, y) = f(x, y)$$

при некоторых дополнительных ограничениях, налагаемых на функцию $f(x, y)$, решена в статье автора (Сб. научн. тр. Куйбышевского индустр. ин-та, 1950, 41—46). *Г. Ф. Манджавидзе*

Примечание редакции. Если заметить, что краевые условия задачи эквивалентны условиям $w = 0$, $\Delta w = 0$ на границе области $0 < x < \infty$, $0 < y < b$, то задачу можно свести к двум задачам Дирихле для уравнений Пуассона $\Delta^* v = f$, $\Delta^* u = v$ при краевых условиях $v = 0$, $u = 0$ на границе рассматриваемой области.

3708. Добавление к «Эллиптическим дифференциальным уравнениям с частными производными». Ниренберг (Addendum to «Elliptic partial differential equations». Nirenberg Louis), Communs Pure and Appl. Math., 1953, **6**, № 3, 359 (англ.)

Исправление второго доказательства существования решения основной краевой задачи, рассмотренной автором (РЖМат, 1954, 1662). *А. Д. Мышкис*

3709. Об одном типе смешанных условий для уравнений с частными производными. Микусинский (Sur un type de conditions mixtes pour les équations aux dérivées partielles. G.-Mikusiński J.), Studia math. (Warszawa), 1953, **13**, № 2, 277—286 (франц.)

Продолжение предыдущей работы автора (Studia math. (Warszawa), 1951, **12**, 227—270), относящейся к уравнениям типа

$$\sum_{\mu=0}^{m}\sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu}\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial t^\mu \partial\lambda^\nu} x(t, \lambda) = \varphi(t, \lambda)$$
$$(a_{\mu\nu} \text{ — постоянные}) \tag{1}$$

со смешанными условиями

$$\sum_{\mu=0}^{\varkappa}\sum_{\nu=0}^{n} a_{m-\varkappa+\mu,\nu}\frac{d^\nu}{d\lambda^\nu}\left(\frac{\partial^\mu x}{\partial t^\mu}\right)_{t=0} = g_\varkappa(\lambda),$$
$$(\varkappa = 0, 1, \ldots, m-1), \tag{2}$$

$$x(t, \lambda_1) = v_1(t), \quad x(t, \lambda_2) = v_2(t), \tag{3}$$

в которых функции $g_\varkappa, v_1, v_2$ заданы на границе области $0 \leqslant t < \infty$, $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$.

Вопрос об однозначности решений $x(t, \lambda)$ решается в зависимости от корней операторного характеристического уравнения

$$a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \tag{4}$$

в котором $a_{n-\nu} = a_{m\nu}s^m + \cdots + a_{0\nu}$ (буква s означает оператор дифференцирования по t, а произведение есть свертка $ab = \int_a^t a(\tau)\,b(t-\tau)\,d\tau$; см. работу автора (Studia math. (Warszawa), 1950, **11**, 41—70)). Если уравнение (4) имеет, по меньшей мере, два логарифмических корня w_1 и w_2 (оператор w называется логарифмическим, если существует ненулевое решение уравнения $\frac{dx}{d\lambda} - wx = 0$), то для однозначности решений уравнения (1) с условиями (2) и (3) необходимо и достаточно, чтобы уравнение (4) не имело логарифмических корней, отличных от w_1 и w_2, и чтобы $(\lambda_2 - \lambda_1) \times (w_2 - w_1) \neq 2k\pi i$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Из предыдущей работы автора вытекает: 1) если уравнение (4) имеет только один логарифмический корень, то условия (2) вместе с любым из условий (3) влекут однозначность решений уравнения (1); 2) если уравнение (4) не имеет логарифмических корней, то одни только условия (2) влекут эту однозначность. Доказательство методом операторов опирается на лемму: в теле операторов w уравнение $e^{w}=1$ удовлетворяется только числами $2k\pi i$ (k — целые).

Работа иллюстрируется эффективным решением четырех примеров. *S. Drobot*

3710. Интегральные формулы и граничные условия для гиперболических уравнений с тремя независимыми переменными и областей внутри конуса. Мак-Калли, Титт (Integration formulae and boundary conditions for the hyperbolic equation with three independent variables and regions interior to the cone. McCulley W. S., Titt E. W.), J. Rational Mech. and Analysis, 1953, 2, № 3, 443—484 (англ.)

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L(u)\equiv -u_{11}-u_{22}+u_{33}+B^i u_i+Cu=f(x^i), \quad (1)$$

где x^i $(i=1,2,3)$ — независимые переменные, u_i, u_{ij} — производные первого и второго порядков искомой функции $u(x^i)$, B^i, C — постоянные. Пусть (ξ^i) — некоторая точка, $X^i=x^i-\xi^i$. Определим R равенством $R^2=(X^3)^2-(X^1)^2-(X^2)^2$. Тогда характеристический конус с вершиной в (ξ^i) определится равенством $R=0$, а его внутренность — неравенством $R^2>0$. Пусть $\delta^2=C+\frac{1}{4}(B^1+B^2-B^3)$. При помощи функции

$$V=e^{\frac{1}{2}(B^1X^1+B^2X^2-B^3X^3)}\frac{\cos\delta R}{R},$$

которая является решением уравнения (1) внутри конуса и обращается в бесконечность на его поверхности, в работе строится ряд таких функций (обобщенных потенциалов) аргументов X^i, которые на некоторых двух плоскостях, проходящих через вершину и внутри конуса (например, на плоскостях $X^1=0$ и $X^2=0$), имеют наперед заданные скачки нормальной производной. Пусть Q_2 означает некоторую поверхность, пересекающую одну из полостей конуса (например, $X^3<0$), и пусть Q_3 есть часть внутри указанной полости, ограниченная Q_2. В работе выводятся формулы (2.30 и 3.12) вида

$$u(\xi^i)=\sum_j (V_1u)_{\sigma_j}+\int_l (V_2u+V_3u_1+V_4u_2+V_5u_3)+$$
$$+\iint_{Q_2}(V_6u+V_7u_1+V_8u_2+V_9u_3)+\iiint_{Q_3}Vf,$$

где l — некоторая линия на Q_2, $V_1, V_2, \ldots, V_9$, V — обобщенные потенциалы и их первые производные, σ_j ($j=1$ или $j=1,2$) — отдельные изолированные точки Q_2.

Чтение статьи затруднено тем обстоятельством, что авторы рассматривают уравнение вида

$$L(u)\equiv A^{ij}u_{ij}+B^iu_i+Cu=f(x^i), \quad (2)$$

где A^{ij} — симметричная неособая матрица, квадратичная форма которой принимает значения разных знаков. Нетрудно видеть, что линейной заменой независимых переменных и умножением уравнения (2) на ±1 его можно привести к (1), что значительно упростило бы изложение, освободив его от излишних выкладок по линейной алгебре. Используемый в работе аппарат линейной алгебры и обобщенных потенциалов изложен в статье тех же авторов (J. Rational Mech. and Analysis, 1953, 2, № 3, 413—442). *Х. Л. Смолицкий*

3711. Тождество, ведущее к решению проблемы Кирхгофа для затухающих волн. Дюран (Une identité conduisant à la solution du problème de Kirchhoff pour les ondes amorties. Durand Émile), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 13, 647—649 (франц.)

Автор устанавливает справедливость тождества

$$\left.\begin{matrix}4\pi\\2\pi\\0\end{matrix}\right\}\psi(x_u,vt)=$$
$$=[\partial_u\partial^u+k_0^2-v^{-2}\partial_t\partial_t]\int_V dx_1'\,dx_2'\,dx_3'\times$$
$$\times\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{t-r/v}_{-\infty}\psi(x_u',v\tau)\,I_0(ik_0\gamma)\,v\,d\tau,$$

где значения 4π, 2π или 0 соответствуют положению точки (x_u) внутри, на границе или вне области V. $\partial_u\partial^u$ есть оператор Лапласа, $r^2=(x_u-x_u')(x^u-x'^u)$, $\gamma=[v^2(t-\tau)^2-r^2]^{\frac{1}{2}}$. При помощи этого тождества получено решение уравнения

$$(\partial_u\partial^u\pm k_0^2-(1/v^2)\,\partial_t\partial_t)\,\psi=0.$$

При $k_0=0$ решение переходит в классическую формулу Кирхгофа для волнового уравнения. *П. П. Бирюлин*

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

3712. Простой критерий устойчивости вынужденных колебаний в нелинейных системах. Клоттер, Пинни (A comprehensive stability criterion for forced vibrations in nonlinear systems. Klotter K., Pinney E.), J. Appl. Mech., 1953, 20, № 1, 9—12 (англ.)

Методом гармонического баланса Крылова и Боголюбова (Введение в нелинейную механику, Изд-во АН УССР, Киев, 1937) исследуется устойчивость периодических решений $q=Q\cos(kt+\varphi)$ уравнения $\ddot{q}+k^2q+k^2\Phi(q,\dot{q})-p\cos\Omega t=0$, где k, p и Ω — постоянные, найденных приближенно этим же методом при предположении, что $|\Phi|$ и p малы и $\Omega\approx k$.

Устанавливается, что при

$$S(Q_0)+Q_0S'(Q_0)\leqslant 0, \quad (1)$$

где

$$S(Q)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(y,y)\sin x\,dx,\quad y=Q\cos x,$$

периодический режим с амплитудой Q_0 устойчив, если $\left[\frac{dQ}{dp}\right]_{Q=Q_0}>0$, и неустойчив при обратном знаке последнего неравенства. Если же неравенство (1) не выполняется, то периодический режим неустойчив при любом знаке $\left[\frac{dQ}{dp}\right]_{Q=Q_0}$.

М. А. Айзерман

3713. Новые критерии гиперболического и гиперболо-эллиптического движений в задаче трех тел. Мерман Г. А., Астроном. ж., 1953, **30**, № 3, 332—339

В связи с проблемой возможности захвата в задаче трех тел предлагаются новые критерии гиперболического и гиперболо-эллиптического движений. Предложены критерии более общие сравнительно с ранее имевшимися критериями Г. Ф. Хильми (Проблема n тел в небесной механике и космогонии, Изд-во АН СССР, М., 1951) и Г. А. Мермана (Докл. АН СССР, 1952, **85**, 727).

Пусть m_0, m_1, m_2 массы трех гравитирующих тел P_0, P_1, P_2,

$$M=m_0+m_1+m_2,\quad \lambda=\frac{m_1}{m_0+m_1},\quad \mu=\frac{m_0}{m_0+m_1};$$

$\mathbf{r}_\nu$ — вектор, соединяющий $P_{\nu+1}$ с $P_{\nu+2}$ (индексы, отличающиеся на целое число, кратное трем, принимаются эквивалентными); $\mathbf{r}=\mathbf{r}_2$, $\bar{\rho}$ — вектор, соединяющий центр тяжести P_0 и P_1 с точкой P_2.

Автор формулирует следующие два критерия:

1. Критерий гиперболического движения. Если в задаче трех тел не происходит столкновений, а для начального момента можно указать такие три числа $\varepsilon_0>0$, $\varepsilon_1>0$ и $\varepsilon_2>0$, что

$$0{,}5\,[|\dot{\mathbf{r}}_\nu(0)|+\dot{\mathbf{r}}_\nu(0)]\geqslant\varepsilon_\nu\quad(\nu=0,1,2),$$

$$\frac{(m_{\nu+1}+m_{\nu+2})\operatorname{arc\,tg}\dfrac{k'_\nu}{k_\nu}}{k'_\nu[|\dot{\mathbf{r}}_\nu(0)|-\varepsilon_\nu]\,r_\nu(0)}+$$

$$+\frac{m_\nu\operatorname{arc\,tg}\dfrac{k'_{\nu+1}}{k_{\nu+1}}}{k'_{\nu+1}[|\dot{\mathbf{r}}_{\nu+1}(0)|-\varepsilon_{\nu+1}]\,r_{\nu+1}(0)}+$$

$$+\frac{m_\nu\operatorname{arc\,tg}\dfrac{k'_{\nu+2}}{k_{\nu+2}}}{k'_{\nu+2}[|\dot{\mathbf{r}}_{\nu+2}(0)|-\varepsilon_{\nu+2}]\,r_{\nu+2}(0)}\leqslant\varepsilon_\nu\quad(\nu=0,1,2),$$

где

$$k_\nu=\frac{\dot{\mathbf{r}}_\nu(0)-\varepsilon_\nu}{|\dot{\mathbf{r}}_\nu(0)|-\varepsilon_\nu},\quad k_\nu^2+k_\nu'^2=1\quad(\nu=0,1,2),$$

то движение будет гиперболическим при $t\to+\infty$.

2. Критерий гиперболо-эллиптического движения. Если в задаче трех тел не происходит столкновений и можно указать такие положительные числа $R, a>\max(\lambda,\mu)$ и ε, что в момент $t=0$

$$\rho(0)<a_0r_0(0),\quad \rho<a_1r_1(0);$$

$$0{,}5\,[|\dot{\bar{\rho}}(0)|+\dot{\rho}(0)]>\varepsilon;$$

$$\frac{A\operatorname{arc\,tg}\dfrac{k'}{k}}{k'[|\dot{\bar{\rho}}(0)|-\varepsilon]\,\rho(0)}\leqslant\varepsilon;$$

$$\frac{m_0+m_1}{r(0)}-\frac{\dot{\mathbf{r}}(0)^2}{2}\geqslant\frac{m_0+m_1}{R}+\frac{B}{L\rho(0)^2};$$

$$\rho(0)\geqslant ar(0),\ \text{если}\ \dot{\rho}(0)-\varepsilon\geqslant aD;$$

$$a\sqrt{\left\{\frac{r(0)}{\rho(0)}\,[|\dot{\bar{\rho}}(0)|-\varepsilon]-kD\right\}^2+k'^2D^2}<k'^2\,[\dot{\rho}(0)-\varepsilon];$$

$$\text{если}\ \dot{\rho}(0)-\varepsilon<aD,$$

где

$$L=0{,}5\,[|\dot{\bar{\rho}}(0)|+\dot{\rho}(0)]-\varepsilon,$$

$$k=\frac{\dot{\rho}(0)-\varepsilon}{|\dot{\bar{\rho}}(0)|-\varepsilon},$$

$$k^2+k'^2=1,\quad a_0\geqslant\frac{1}{1-\frac{\mu}{a}},\quad a_1\geqslant\frac{1}{1-\frac{\lambda}{a}},$$

$$A=M\max(\lambda a_0^2+\mu,\lambda+\mu a_1^2),$$

$$D=\sqrt{\dot{\mathbf{r}}(0)^2+\frac{2B}{L\rho(0)^2}},$$

$$2B=m_2\sqrt{2(m_0+m_1)R}\times$$

$$\times\max[(1+\mu)a_0^3+a_0^2+a_0+\lambda,(1+\lambda)a_1^3+a_1^2+a_1+\mu]$$

то движение будет гиперболо-эллиптическим при $t>0$, причем $\rho\to\infty$ при $t\to+\infty$, а $r<R$ при всех $t\geqslant0$.

Автор применяет предложенные критерии к известному примеру О. Ю. Шмидта (Докл. АН СССР, 1947, **58**, 213) и сравнивает их с критериями Г. Ф. Хильми в этих же условиях.

Примечание референта. Впоследней фразе статьи содержится утверждение, что критерий гиперболического движения Г. Ф. Хильми выполняется лишь при $t=-129764$; фактически он выполняется много раньше. *Г. Ф. Хильми*

3714. К математической теории сепарации методом встречных потоков. Хадвигер (Zur mathematischen Theorie der Gegenstromextraktion. Hadwiger H.), Experientia, 1953, **9**, № 10, 391—394 (нем.)

Полное математическое исследование процесса сепарации в аппарате Зигнера (Signer R., Chimia, 1952, **6**, 243), состоящем из $2n+1$ камер C_i, $i=-n,-n+1,\ldots,0,\ldots,n-1,n$, через которые в противоположных направлениях проходят потоки несмешивающихся растворителей (более легкого — через верхний ряд соединяющих камеры

отверстий, более тяжелого — через нижний ряд). Подлежащая сепарации смесь концентрации $r(t)$ вводится в камеру C_0. Если через $p_i(t)$ и $q_i(t)$ обозначить концентрацию в верхней и нижней частях (занятых соответствующими растворителями) камеры C_i, то имеет место соотношение

$$p_i'(t) = ap_{i+1}(t) - (a+b)\,p_i(t) + bp_{i-1}(t) + \varepsilon_i d r(t), \quad (1)$$

где a, b, d — постоянные параметры аппарата, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_i = 0$ $(i \neq 0)$, $p_{n+1}(t) = p_{-n-1}(t) \equiv 0$ ($q_i(t)$ предполагается пропорциональным $p_i(t)$ вследствие практически мгновенно наступающих выравниваний концентраций в частях каждой камеры). Пусть $P_i(z)$, $R(z)$ — преобразования Лапласа соответственно $p_i(t)$, $r(t)$; тогда из (1) вытекает, что производящая функция

$$H(z, \zeta) = \sum_{-n}^{n} P_i(z)\, c^i \zeta^i =$$

$$= \frac{P_{-n}(z)\, c^{-n}\zeta^{-n} + P_n(z)\, c^n \zeta^{n+2} - R(z)\,\dfrac{d}{a}\, c\zeta}{1 - 2\,\dfrac{z + a + b}{2\sqrt{ab}}\,\zeta + \zeta^2},$$

где $c = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$, что приводит к формулам

$$c^n P_n(z) = c^{-n} P_{-n}(z) = \frac{d}{2\sqrt{ab}}\, R(z)\, K\left(\frac{z + a + b}{2\sqrt{ab}}\right), \quad (2)$$

где $K(x) = \dfrac{1}{T_{n+1}(x)}$ ($T_{n+1}(x)$ — многочлен Чебышева). Формулы (2) приводят к следующим представлениям для искомых функций $p_{-n}(t)$ и $p_n(t)$:

$$p_{\pm n}(t) = c^{\mp n} d \int_0^t e^{-(a+b)\tau} k\,(2\sqrt{ab}\,\tau)\, r(t - \tau)\, d\tau, \quad (3)$$

где

$$k(t) = \frac{1}{n+1} \sum_0^n (-1)^\nu \beta_\nu e^{\alpha_\nu t},$$

$$\alpha_\nu = \cos\frac{(2\nu + 1)\,\pi}{2n + 2}, \qquad \beta_\nu = \sin\frac{(2\nu + 1)\,\pi}{2n + 2}.$$

Приводятся также предельные случаи формул (3), соответствующие мгновенному введению (при $t = 0$) конечного объема смеси (это означает, что $r(t)$ — импульсная функция). *В. И. Левин*

3715. Осуществление особых контактных преобразований статическим электромагнитным полем в вакууме. II. Ивата (Realization of special contact transformations with static electromagnetic fields in vacuo. II. Iwata Giiti), Progr. Theoret. Phys., 1953, **9**, № 2, 97—107 (англ.)

Реферируемая работа является продолжением предыдущей (Progr. Theoret. Phys., 1952, 8, № 2, 183—192). Рассматриваются решения $x_s(t, a_r, b_r)$, $y_s(t, a_r, b_r)$ системы Гамильтона

$$\dot{x}_s = H_{y_s}, \quad \dot{y}_s = -H_{x_s}, \quad s = 1, 2, \ldots, n,$$

как контактные преобразования $(a_s, b_s) \to (x_s, y_s)$. Вводится матрица эйконала

$$S = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial x_r}{\partial a_s} & \dfrac{\partial x_r}{\partial b_s} \\ \dfrac{\partial y_r}{\partial a_s} & \dfrac{\partial y_r}{\partial b_s} \end{matrix} \right\| \equiv \left\| \begin{matrix} s_{xa} & s_{xb} \\ s_{ya} & s_{yb} \end{matrix} \right\|,$$

характеризующая бесконечно малые преобразования

$$\begin{pmatrix} \delta x_r \\ \delta y_r \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \delta a_s \\ \delta b_s \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Доказывается, что матрица S неразложима ($\det S = 1$). С этой целью выводится дифференциальное уравнение

$$\frac{dS}{dt} = \left\| \begin{matrix} H_{y_r x_s} & H_{y_r y_s} \\ -H_{x_r x_s} & -H_{x_r y_s} \end{matrix} \right\| S.$$

Рассматриваются различные частные случаи, когда функция H является квадратичной формой переменных x_s, y_s, и устанавливаются условия, при которых $s_{xa} = 0$ или $s_{xb} = 0$.

Дается приложение к электродинамике (движение электрона в магнитном поле с векторным потенциалам **A**). Устанавливается, что условие инвариантности действия по Лагранжу при контактных преобразованиях (1) возможно лишь в случае инвариантности вектора **A**. Отсюда делается вывод о невозможности электронного микроскопа специального вида («stigmatic»-микроскоп). Далее рассматривается вопрос о фокусировке заряженных частиц с помощью преобразования

$$\xi_s = a_s \cos \nu t + \frac{b_s}{\nu} \sin \nu t, \quad s = 1, 2, 3.$$

Практического способа для реализации такого преобразования не дается. В заключение выводится условие инвариантности действия при переменной массе:

$$L d\tau = -mc \left(dx_0^2 - \sum_{k=1}^{3} dx_k^2 \right)^{1/2} + \frac{e}{c} \sum_{k=1}^{3} A_k dx_k$$

(действие рассматривается в том виде, который соответствует специальной теории относительности). Этим дается новый вывод преобразований Лоренца. *И. С. Аржаных*

3716. Об изгибе упругих пластин. IV. Сенгупта (On the bending of an elastic plate. IV. Sengupta H. M.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1953, **45**, № 1, 9—19 (англ.)

Ставится задача об изгибе тонкой упругой эллиптической пластинки с жестко закрепленным краем, подверженной действию нагрузки, равномерно распределенной по некоторому прямоугольнику K: $X_1 \leqslant x \leqslant X_2$, $Y_1 \leqslant y \leqslant Y_2$. Задача состоит в интегрировании неоднородного бигармонического уравнения

$$\nabla^4 \omega = \begin{cases} \text{const} & \text{внутри } K \\ 0 & \text{вне } K \end{cases}$$

при условии, что искомая функция обращается в нуль вместе со своей нормальной производной на эллипсе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, ограничивающем пластинку. Посредством уравнения $x+iy=c\operatorname{ch}(\xi+i\eta)$, $c=\text{const}>0$, вводятся эллиптические координаты ξ и η. Искомая функция представляется в виде

$$\omega=-\frac{W}{8\pi D(X_2-X_1)(Y_2-Y_1)}\iint\limits_K R^2\ln R\,dx_1\,dy_1+\omega',$$

где W — нагрузка, действующая на пластинку, D — жесткость пластинки при изгибе, ω' — гармоническая в области пластинки функция, $R^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2$. Функция ω' задается в виде ряда по гиперболическим функциям переменной ξ и тригонометрическим функциям переменной η; коэффициенты этого ряда определяются из краевых условий и из разложения интеграла

$$\iint\limits_K R^2\ln R\,dx_1\,dy_1$$

в ряд Фурье по η, которое автор приводит без доказательства. *С. Г. Михлин*

3717. Представление динамического вектора смещения зависимыми волновыми функциями. Аржаных И. С., Докл. АН УзССР, 1953, № 10, 3—5 (русск.; резюме узб.)

Формулируются четыре теоремы (с кратким указанием на способ доказательства) о представлении решения системы уравнений теории упругости

$$\alpha\,\text{grad div}\,\boldsymbol{u}-\beta\,\text{rot rot}\,\boldsymbol{u}-\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}=\boldsymbol{F} \qquad (1)$$

при помощи решений волновых уравнений.

Так, например, теорема 1 утверждает, что если вектор $\boldsymbol{G}$ и скаляр θ суть решения уравнений

$$\beta\Delta\boldsymbol{G}-\frac{\partial^2\boldsymbol{G}}{\partial t^2}=\boldsymbol{F}+\frac{\alpha-\beta}{2\alpha}\boldsymbol{p}\,\text{div}\,\boldsymbol{F}$$

и

$$\alpha\Delta\theta-\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=\text{div}\,\boldsymbol{F},$$

где Δ — оператор Лапласа, и если, кроме того,

$$\theta=\text{div}\left(\boldsymbol{G}-\frac{\alpha-\beta}{2\beta}\boldsymbol{p}\theta+\right.$$

$$\left.+\frac{(\alpha-\beta)^2}{8\pi\alpha\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\frac{1}{r}\boldsymbol{q}\theta\left(q,\,t-\frac{r}{\sqrt{\beta}}\right)dq\right),$$

то вектор

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{G}-\frac{\alpha-\beta}{2\beta}\boldsymbol{p}\theta+$$

$$+\frac{(\alpha-\beta)^2}{8\pi\alpha\beta^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\frac{1}{r}\boldsymbol{q}\theta\left(q,\,t-\frac{r}{\sqrt{\beta}}\right)dq$$

есть решение уравнения (1).

Даются также представления, содержащие лишь $\text{div}\,\boldsymbol{u}$ и $\text{rot}\,\boldsymbol{u}$. *В. Д. Купрадзе*

3718. Точная теория диффракции электромагнитных волн у щели. Мюллер, Вестпфаль (Eine strenge Behandlung der Beugung elektromagnetischer Wellen am Spalt. Müller Rolf, Westpfahl Konradin), Z. Physik, 1953, **134**, № 3, 245—263 (нем.)

Математическая задача диффракции у щели $|x|<a$, $z=0$ в случае идеально проводящей плоскости $z=0$, $|x|\geqslant a$, плоской волны, идущей из полупространства $z<0$ в направлении оси z, приводит, как известно, к двумерным краевым задачам: $(\Delta+k^2)E=0$, $E=0$ для $z=0$, $|x|\geqslant a$ и $(\Delta+k^2)H=0$, $\frac{\partial H}{\partial z}=0$ для $z=0$, $|x|\geqslant a$, где $k^2=\omega^2\varepsilon_0\mu_0$, с обычными условиями излучения на бесконечности. Формальное решение этих задач возможно путем разделения переменных в эллиптических координатах, однако удобнее свести задачи к интегральным уравнениям

$$\int\limits_{-a}^{a}e(t)\left\{H_0^{(1)}(k\,|\,x-t|)-\cos kx\cdot H_0^{(1)}(k\,|\,t\,|)\right\}dt=$$

$$=\frac{2E_0}{k}(1-\cos kx), \qquad (1)$$

$$\int\limits_{-a}^{a}h(t)\,H_0^{(1)}(k\,|\,x-t\,|)\,dt=2iH_0 \qquad (2)$$

для неизвестных функций $e(x)$ и $h(x)$, определяющих поле в щели (E_0 и H_0 — постоянные). В работе дается новый подход к решению уравнений (1) и (2) разложением в ряды по степеням $\alpha=ka$ (обобщающий метод Рэлея, соответствующий случаю $\alpha\ll 1$) с последующим сравнением коэффициентов, что приводит к рекуррентной системе простых интегральных уравнений. При $x=a\cos u$, $t=a\cos v$ ядра уравнений (1) и (2) обозначаются через $\frac{2i}{\pi}P(u,v)$ и $\frac{2i}{\pi}S(u,v)$, а самые уравнения переходят в

$$\int\limits_0^{\pi}p(v)\,P(u,v)\,dv=F(u)=1-\cos(\alpha\cos u),$$

$$\int\limits_0^{\pi}s(v)\,S(u,v)\,dv=1,$$

где $p(v)=\frac{\alpha i}{\pi H_0}\sin v\cdot e(a\cos v)$, $s(v)=\frac{a}{\pi H_0}\sin v\times$ $\times\,h(a\cos v)$. Для искомых функций $p(v)$ и $s(v)$ авторы получают разложения

$$p(v)=\sum_0^{\infty}A(2m)\cos 2mv,\qquad s(v)=\sum_0^{\infty}B(2m)\cos 2mv,$$

где

$$A(2m)=\sum_m^{\infty}\alpha^{2n}a(2n,2m),\qquad B(2m)=\sum_m^{\infty}\alpha^{2n}b(2n,2m),$$

а величины $a(2n,2m)$ и $b(2n,2m)$ (также зависящие от α) могут быть вычислены по рекуррентным формулам. Так,

$$A(0)=\frac{\alpha^2}{2\pi}\left\{1-\frac{\alpha^2}{4}\left(q-\frac{3}{4}\right)\right\},$$

$$A(2)=-\frac{\alpha^2}{2\pi}\left\{1-\frac{\alpha^2}{4}\left(q-\frac{5}{6}\right)\right\},\quad A(4)=\frac{\alpha^4}{96\pi},$$

$$B(0)=\frac{1}{\pi q}\left\{1+\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\alpha^4}{64}\left(\frac{3}{4}-q+\frac{1}{2q}\right)\right\},$$

$$B(2)=-\frac{\alpha^2}{8\pi q}\left\{2q+1+\frac{\alpha^2}{12}(2q+5)\right\},$$

$$B(4)=\frac{\alpha^4}{1536}(4q+3),$$

где $q=\ln(\gamma\alpha/4i)$ ($\ln\gamma$ — постоянная Эйлера). Приводятся асимптотические выражения поля в точках полупространства $z>0$, удаленных от щели.

Устанавливается связь полученных решений уравнений (1) и (2) с решениями Зоммерфельда (Зоммерфельд А., Оптика, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1952, § 39), причем отмечается наличие ошибки в одном коэффициенте разложения Зоммерфельда функции $e(t)$. Полученные результаты сравниваются с результатами других авторов (Groschwitz, Hönl H., Z. Physik, 1952, **131**, 305), разлагавших решения краевых задач не по цилиндрическим, а по плоским волнам. *В. И. Левин*

3719. Электростатическая энергия зарядов, расположенных на окружности на равных расстояниях друг от друга. Эмерслебен (Das elektrostatische Selbstpotential äquidistanter Ladungen auf einer Kreislinie. Emersleben Otto), Math. Nachr., 1953, **10**, № 3—4, 135—167 (нем.)

В первой части настоящей работы исследуется электростатическая энергия системы равных по величине, но чередующихся по знаку зарядов, расположенных на равных расстояниях друг от друга на окружности. В предположении, что величина заряда $e=1$ и расстояние между двумя смежными зарядами по дуге $\widehat{a}=1$, получается следующее выражение для электростатической энергии:

$$_{2n}^{0}\Phi=\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{\sin\frac{\pi}{2n}k}, \qquad (1)$$

где n — число пар зарядов. Автор доказывает, что для больших n это выражение имеет следующее асимптотическое представление:

$$_{2n}^{0}\Phi=-(2\log 2)n-$$

$$-2\sum_{k=1,2,\ldots}\frac{(-1)^{k+1}}{kn^{2k-1}}\left(1-\frac{1}{2^{2k}}\right)\zeta(2k)B_k=$$

$$=-(2\log 2)n-\frac{\pi^2}{48n}+\frac{7\pi^4}{23040\,n^3}+\ldots, \qquad (2)$$

где $\zeta(2k)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^{l+1}}{l^{2k}}$, $B_k=\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}}\zeta(2k)$,

$\zeta(s)$ — дзета-функция Римана.

Во второй части работы автор исследует электростатическую энергию системы одинаковых зарядов, расположенных на равном расстоянии друг от друга на окружности. В предположении, что $e=1$ и $\widehat{a}=1$, получим:

$$_{n}^{0}\Phi=\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}k}, \qquad (3)$$

где n — число зарядов. Автор доказывает, что для больших n имеет место следующее асимптотическое представление:

$$_{n}^{0}\Phi=n\log n+$$

$$+\left(C-\log\frac{\pi}{2}\right)n-\frac{\pi^2}{72}\cdot\frac{1}{n}+\frac{7\pi^4}{43200}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots, \qquad (4)$$

где C — постоянная Эйлера.

В заключение автор сравнивает асимптотические представления (2) и (4) с аналогичными выражениями, полученными им ранее (Math. Nachr., 1950, **3**, 373—386; 1951, **5**, 392) для знакопеременных и знакопостоянных систем зарядов, расположенных на прямой. *Д. П. Костомаров*

3720. О напряжении на выходе каскада усиления при условии, что частота напряжения на входе линейно зависит от времени. Пуэнсело (Réponse d'un étage amplificateur à circuit antirésonnant à une tension d'entrée dont la fréquence instantanée varie linéairement en fonction du temps. Poincelot Paul), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 21, 1314—1315 (франц.)

Рассматриваемое напряжение на выходе

$$f(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\frac{\omega_0^2}{4\alpha}z^2+i\tau z}\frac{z}{z^2-\frac{i}{Q}z-1}\,dz,\quad \tau=\omega_0 t,$$

преобразуется к виду

$$f(\tau)=z_1K(\nu_1)-z_2K(\nu_2),$$

где

$$K(\nu)=i\pi e^{-i\nu^2}+\frac{1}{4}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\nu^2}{2}\right)}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n i^n I_n(b)\left[J_{n-\frac{1}{2}}(a)-J_{n+\frac{1}{2}}(a)^2\right]$$

и

$$z_{1,2}=\frac{i}{2Q}\pm\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}},$$

$$\nu_{1,2}=\frac{\omega_0}{2\sqrt{\alpha}}z_{1,2}-t\sqrt{\alpha},\quad \frac{\nu^2}{2}=a+ib.$$

Доказательство не приводится. *В. И. Левин*

3721. Новое доказательство теоремы Лагранжа в гидродинамике. Масуда (A new proof of Lagrange's theorem in hydrodynamics. Masuda Hideyuki), J. Phys. Soc. Japan, 1953, **8**, № 3, 390—393 (англ.)

Для решения основных гидродинамических уравнений идеальной баротропной жидкости система трех дифференциальных уравнений в параметрах Эйлера заменяется одним линейным уравнением в частных производных следующего вида:

$$\varphi_t+u\varphi_x+v\varphi_y+w\varphi_z-M_x\varphi_u-M_y\varphi_v-M_z\varphi_w=0, \qquad (1)$$

где u, v, w — компоненты скорости, φ — искомая функция, M — сумма функции давления и потенциала массовых сил. Линии тока служат характе-

ристиками уравнения (1). Вводя функцию

$$H=\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)+M,$$

автор записывает характеристические уравнения для (1) в канонической форме уравнений Гамильтона — Якоби с неизвестными x, y, z, u, v, w в пространстве (t, x, y, z, u, v, w). Если $\frac{\partial H}{\partial t}$ не зависит от x, y, z, то получается известный интеграл Бернулли вдоль характеристик.

При помощи интеграла действия (эйконал)

$$J=\int_{\sigma}^{s}(\dot{x}u+\dot{y}v+\dot{z}w-H)\,dt \quad (\sigma\leqslant t\leqslant s)$$

изучается решение канонических уравнений в окрестности характеристики и доказывается известная теорема Лагранжа о сохранении потенциального движения. Потенциал скорости есть решение уравнения Якоби в частных производных, и поле распределения потенциала скорости образует поле экстремалей.

Предложенным методом решается система трех гидродинамических уравнений независимо от уравнения неразрывности, поэтому M остается произвольной. Уравнение неразрывности должно быть удовлетворено подбором функции M. С точки зрения практического построения решения гидродинамических уравнений предложенный метод мало эффективен. *Д. Е. Долидзе*

3722. Распространение начальных уплотнений в вязком газе. Войт С. С., Докл. АН СССР, 1953, 88, № 2, 221—224

Приведены результаты исследования гидромеханической задачи определения коэффициента уплотнения $s=(\rho-\rho_0)/\rho_0$ бесконечного и покоящегося на бесконечности вязкого газа, возмущенного путем изменения плотности в начальный момент времени в некоторой области G, которая сведена к решению задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=c^2\Delta s+\frac{4}{3}\nu\frac{\partial}{\partial t}\Delta s$$

при начальных условиях:

$$s(x, y, z, 0)=\omega_1(x, y, z)$$

при $(x, y, z)\in G$ и нулю при $(x, y, z)\notin G$,

$$\frac{\partial s(x, y, z, 0)}{\partial t}=\omega_2(x, y, z)$$

при $(x, y, z)\in G$ и нулю при $(x, y, z)\notin G$

(здесь c — скорость звука при отсутствии вязкости, ν — кинематический коэффициент вязкости).

Корректность постановки указанной задачи Коши получена непосредственным применением теоремы И. Г. Петровского (Петровский И. Г., Бюлл. Моск. гос. ун-та, 1938, 1, № 8, 23). Пользуясь сферической системой координат r, ϑ, ψ, автор дает формулу для решения в случае, если область G есть сфера радиуса ε и начальные условия обладают сферической симметрией. В предположении, что при $t=0$ $\frac{\partial s}{\partial t}=0$, автор получает асимптотическую формулу

$$s(\tau)=\frac{1}{R}e^{-\tau(-iv\zeta_1+\zeta_1^2+i\zeta_1\sqrt{1-\zeta_1^2})}\times$$

$$\times\left[p_1\tau^{-\frac{1}{2}}+p_2\tau^{-\frac{3}{2}}+\ldots\right],$$

где $R=\frac{3c}{2\nu}r$, $\tau=\frac{3c}{2\nu}ct$, ζ_1, p_1, p_2, ... — постоянные.

Окончательные асимптотические выражения коэффициента уплотнения приведены для $v=1$ (скорость звука) для плоских волн в виде

$$s(t)=\sqrt{\frac{3}{8\pi\nu}}\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{\varepsilon}\omega_1(\xi)\,d\xi+\frac{1}{\sqrt{t}}O\left(\frac{1}{t}\right),$$

а для сферических волн в виде

$$s(t)=\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{8\pi\nu}}(7+4\alpha)\frac{1}{rc}\frac{1}{t\sqrt{t}}\times$$

$$\times\int_0^{\varepsilon}\omega_1(\xi)\xi^2 d\xi+\frac{1}{t^3\sqrt{t}}O\left(\frac{1}{t}\right).$$

На основе полученных результатов автор дает качественную картину распространения уплотнений в вязком газе. *С. Н. Кыро*

3723. Сферическое препятствие в потоке вязкой жидкости в трубе. Вакия (A spherical obstacle in the flow of a viscous fluid through a tube. Wakiya Shōichi), J. Phys. Soc. Japan, 1953, 8, № 2, 254—257 (англ.)

Рассматривается гидродинамическая задача Стокса для обтекания сферы радиуса a стационарным потоком вязкой несжимаемой жидкости внутри круглой трубы радиуса r_0. Центр сферы лежит на оси трубы, невозмущенное течение в трубе подчиняется закону Пуазейля. Обобщая в некотором смысле результаты, полученные раньше другими авторами, по вопросу влияния стенок трубы на обтекание сферы, автор строит приближенное решение линеаризированных уравнений для симметричного обтекания при помощи интегралов, содержащих функции Бесселя. Это решение граничным условиям на поверхности сферы удовлетворяет приближенно.

Даются формула изменения давления в потоке на бесконечности под влиянием сферы и соответствующая таблица при некоторых значениях отношения a/r_0. Формула силы сопротивления, полученная автором, совпадает с формулой силы сопротивления Факсена (Faxén H., Arkiv för mat., astr. och fys., 1923, 17, № 27, 1—28), полученной им на основании линеаризированных уравнений Осена, если число Рейнольдса в выражении силы сопротивления Факсена приравнять нулю, и уточняет формулу силы сопротивления, полученную Ладенбургом (Ladenburg R., Ann. Phys., 1907, 23) в предположении, что величиной $(a/r_0)^2$ можно пренебречь. *Д. Е. Долидзе*

3724. К вычислению годового хода температуры воды в южных морях. Колесников А. Г., Тр. Мор. гидрофиз. ин-та АН СССР, 1953, 3, 106—127

Впервые дан теоретический анализ процесса формирования и метод вычисления годового хода тем-

пературы воды южных, незамерзающих морей под влиянием всех составляющих теплообмена на поверхности воды и переменного по глубине и во времени коэффициента обмена тепла

$$K(z, \tau) = K(z)(1 + \gamma \cos \omega\tau).$$

Температурное поле определяется из совместного решения системы уравнений переноса тепла для двух слоев:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{K(z)(1 + \gamma \cos \omega\tau)\frac{\partial t}{\partial y}\right\}, \qquad (1)$$

причем $K(z) = K$ при $0 \leqslant y \leqslant h_0$; $K(z) = Ke^{-\delta(y-h_0)}$ при $h_0 \leqslant y \leqslant H$. Краевыми условиями являются непрерывность температур и потоков тепла на границе раздела слоев ($y = h_0$), постоянство температуры на глубине годовых нулевых амплитуд ($y = H$) и полный тепловой поток на поверхности воды в виде

$$y = 0;\ (1 + \gamma \cos \omega\tau)\frac{\partial t_1}{\partial y} = \varkappa\left[t_1 - \sum_{n=0}^{n=j}\left(A_n \cos \frac{2\pi n\tau}{T} + B_n \sin \frac{2\pi n\tau}{T}\right)\right]. \qquad (2)$$

Колебания температуры воды считаются установившимися.

Для решения системы уравнений (1) вводятся новые переменные

$$z = y - h_0;\ \theta = \tau + \frac{\gamma}{\omega}\sin \omega\tau.$$

Это позволяет исключить множитель $(1 + \gamma \cos \omega\tau)$ и получить общее решение при $0 \leqslant y \leqslant h_0$ в виде комбинаций гиперболотригонометрических функций, а в области $h_0 \leqslant y \leqslant H$ — функций Ганкеля первого порядка.

Анализ нестационарного решения показывает, что, в отличие от аналогичного решения при постоянном коэффициенте обмена, амплитуда и сдвиг фаз любой из гармоник колебания температуры зависит соответственно от величин амплитуд и сдвигов фаз всех остальных гармоник, составляющих ход температуры. Каждая гармоника требует для своего описания шести произвольных постоянных. В силу этого удовлетворение краевым условиям в общем случае дает систему $6j$ уравнений, определяющих $6j$ произвольных постоянных, в то время как при постоянном коэффициенте обмена независимо от числа членов суммы в (2) всегда получается система шести уравнений для определения произвольных постоянных. *А. А. Пивоваров*

3725. **Неустановившиеся звуковые волны в трубах. Пирсон** (The transient motion of sound waves in tubes. Pearson J. D.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1953, **6**, ч. 3, 313—335 (англ.)

В первой части работы рассматриваются неустановившиеся звуковые волны в бесконечно длинной цилиндрической трубе произвольного поперечного сечения. Задача сводится к отысканию потенциала скоростей, удовлетворяющего уравнению колебаний $\Delta\varphi - \frac{1}{a^2}\varphi_{tt} = 0$, нулевым начальным условиям, граничному условию $\partial\varphi/\partial n|_\Sigma = 0$ на боковой поверхности трубы и условию излучения на бесконечности. Кроме того, задается значение потенциала $\varphi|_{x=0}$ в некотором поперечном сечении трубы для всех $t \geqslant 0$. Применяя операционный метод, автор получает выражение

$$\varphi = \sum_n H\left(t - \frac{x}{a}\right)\psi_n(y, z)\left\{a_n\left(t - \frac{x}{a}\right) - \int_{x/a}^{t} \frac{a_n(t-y)\,x \cdot k_n J_1(k_n\sqrt{y^2a^2 - x^2})}{\sqrt{(y^2 - x^2/a^2)}}\right\}$$

при $x > 0$ и соответствующее выражение при $x < 0$, здесь $H\left(t - \frac{x}{a}\right)$ — единичная функция Хивисайда, k_n и ψ_n — собственные значения и собственные функции поперечного сечения, $a_n(t)$ — коэффициенты разложения

$$\varphi|_{x=0} = \sum_n a_n(t)\,\psi_n(y, z).$$

При больших значениях t получено асимптотическое выражение для потенциала φ. При этом применяется метод наибыстрейшего спуска.

Во второй части работы исследуется процесс распространения звуковых волн в трубе переменного поперечного сечения. Рассматривается труба, поперечное сечение которой незначительно отличается от постоянного и может быть описано N уравнениями $f_i(y, z) + \varepsilon F_i(x, y, z) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$, где $f_i(y, z) = 0$ — соответствующие уравнения для трубы с постоянным поперечным сечением (функции f_i и F_i предполагаются непрерывными и непрерывно дифференцируемыми). Предполагая, что потенциал скоростей φ_2 в трубе с переменным поперечным сечением мало отличается от потенциала φ_1 в трубе с соответствующим постоянным поперечным сечением ($\varphi_2 = \varphi_1 + \varepsilon\Phi$), пренебрегая величинами порядка ε^2, автор получает для поправки Φ уравнение колебаний, причем значение $\partial\Phi/\partial n$ на боковой поверхности трубы с постоянным поперечным сечением определяется, что позволяет решить задачу операционным методом.

В качестве примера рассмотрена труба, поперечное сечение которой незначительно отличается от прямоугольного. *А. Г. Свешников*

3726. **Решение общей задачи изгиба опертой упругой пластинки. Халилов** (Solution of the general problem of the deflection of a simply supported elastic plate. Halilov Z. I.), Amer. Math. Soc. Translation № 87, 1953, 16 pp. (англ.)

Перевод статьи, напечатанной в Прикл. математике и механике, 1950, **14**, № 4, 405—414.

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 10, 1037.

3727 К. **Устойчивость систем автоматического регулирования. Цыпкин Я. З.,** 56 стр., Всес. заочн. энергет. ин-т, М., 1953

См. РЖМех, 1953, 1014 (К).

3728 **РЕЦ.** **Разложения в ряды в математической физике. Ленсе** (Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik. Lense Josef, 3 verbesserte Aufl., 216 S., 48 Abb., Walter de Gruyter and Co., 1953, 26 DM) [**Рецензия: Гёртлер**

(Görtler H.), Phys. Blätter, 1953, 9, № 10, 477 (нем.)]

3729 РЕЦ. О выполнении принципа Гюйгенса в случае дифференциальных уравнений с частными производными нормального гиперболического типа. Гюнтер (Zur Gültigkeit des Huygens'-schen Prinzips bei partiellen Differentialgleichungen vom normalen hyperbolischen Typus. Günther Paul, 43, S. Berichte Verh. Sächs., Akademie der Wissenschaften, Math. Klasse, Bd. 100, Heft 2, 1.20 doll.) [**Рецензия: Хантьес** (Haantjes J.), Simon Stevin, 1951—1952, 29, № 4, 235 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (голл.]

3730 Д. Колебания механических систем, описываемых линейными дифференциальными уравнениями с периодическими коэффициентами. Воронов Ф. И., Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ленингр. политехн. ин-т, Л., 1954

См. также: 3555, 3665, 3666, 3669, 3687, 3733, 3735, 3761, 3768, 3811, 3824, 3831, 3832, 3834, 3835, 3836, 3865

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3731. Замечание об интегральном уравнении, описывающем метаболические системы. Хирон (A note on the integral-equation description of metabolizing systems. Hearon John Z.), Bull. Math. Biophys., 1953, 15, № 3, 269—276 (англ.)

Подвергается критическому анализу уравнение Брансона, описывающее метаболические системы.

В. В. Немыцкий

3732. Об интегральном уравнении потемнения к краю. Сайкс (The integral equation of limb-darkening. Sykes J. B.), Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1953, 113, № 2, 198—210 (англ.)

Рассматриваются различные методы приближенного решения уравнения

$$I_\lambda(0, \mu) = \int_0^\infty B_\lambda(\tau)\, e^{-\tau/\mu}\, \frac{d\tau}{\mu},$$

характеризующего изменение интенсивности излучения при прохождении атмосферы некоторой звезды.

В. В. Немыцкий

3733. О собственных значениях и функциях интегро-дифференциальной системы. Быков Я. В., Тр. Ин-та матем. и механики АН УзССР, 1953, 10, № 2, 55—84

Рассматривается уравнение

$$L_n(z) = \lambda p(x)\, z(x) + \lambda \int_a^b f(x, t)\, z(t)\, dt \qquad (1)$$

при краевых условиях

$$\sum_{i=0}^{n-1} [\alpha_{ij}\, z^{(i)}(a) + \beta_{ij}\, z^{(i)}(b)] = 0, \qquad (2)$$

$j = 1, 2, \ldots, n$, где $L_n(z)$ — линейный однородный дифференциальный оператор порядка n.

Система (1), (2) исследуется при условиях: коэффициенты $L_n(z)$ — непрерывные функции, старший коэффициент не обращается в нуль; $f(x, t)$ — симметрическая; $f(x, y)$, $p(x)$ — с суммируемыми квадратами; единица не является собственным значением для ядра $\dfrac{f(x, t)}{p(x)}$; система $L_n(z) = 0$ с краевыми условиями (2) самосопряженная и положительная (отрицательная).

Решение системы (1), (2) приводится к решению однородного интегрального уравнения с ядром

$$K(x, y)\, p(y) + \int_a^b K(x, s)\, f(s, y)\, ds, \qquad (3)$$

где $K(x, y)$ — функция Грина для $L_n(z)$ при условиях (2). Последнее в свою очередь сводится к однородному интегральному уравнению с симметрическим ядром

$$\int_a^b M(x, s)\, p(s)\, M(s, y)\, ds + \int_a^b \int_a^b M(x, s)\, f(s, t)\, M(t, y)\, dt\, ds, \qquad (4)$$

где

$$M(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n(x)\, \omega_n(y)}{\sqrt{\lambda_n}},$$

$\{\lambda_n\}$, $\{\omega_n\}$ — собственные значения и собственные функции ядра $K(x, y)$.

Эквивалентность понимается в том смысле, что если $\psi(x)$ — собственная функция ядра (4), то $\varphi(x) = \int_a^b M(x, s)\, \psi(s)\, ds$ — собственная функция (3), и, наоборот, если $\varphi(x)$ — собственная функция ядра (3), то

$$\psi(x) = \int_a^b M(x, s)\, p(s)\, \varphi(s)\, ds + \int_a^b \int_a^b M(x, s)\, f(s, t)\, \varphi(t)\, ds\, dt$$

— собственная функция ядра (4).

Пользуясь теорией интегральных уравнений с симметрическим ядром, автор устанавливает опре-

делённые свойства интегрального уравнения с ядром (3) и тем самым — свойства решений системы (1), (2).
З. И. Халилов

3734. Особые точки функциональных уравнений. Бартл (Singular points of functional equations. Bartle Robert G.), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **75**, № 2, 366—384 (англ.)

Пусть $\Phi(x, y)$ — непрерывный оператор, определенный в окрестности нуля топологического произведения $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ двух вещественных или комплексных банаховых пространств со значениями в $\mathfrak{X}$. Пусть $\Phi(0, 0) = 0$. Рассматриваются вопросы о существовании и единственности малых решений x уравнения $\Phi(x, y) = 0$ при малых y и исследуется случай ветвления решений.

Для случая, когда $\Phi(x, y)$ — интегростепенной ряд, указанные вопросы изучались еще А. М. Ляпуновым в связи с исследованием фигур равновесия вращающейся жидкости, затем в более общей форме Шмидтом (Schmidt E., Math. Ann., 1908, 65, 370—399), Лихтенштейном (Lichtenstein L., Vorlesungen über einigen Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen, Berlin, Springer, 1931). Для широких классов нелинейных интегральных уравнений вопрос о ветвлениях малых решений изучался А. И. Некрасовым (Точная теория волн устоявшегося вида на поверхности тяжелой жидкости, М., 1951) и Н. Н. Назаровым (например, Тр. Среднеазиатского ун-та, 1941, № 33).

Для случая, когда $\Phi(x, y)$ — абстрактный оператор, применялись аналитические методы (Hildebrandt T. H., Graves L. M., Trans. Amer. Math. Soc., 1927, 29, 163—177) и методы, основанные на понятии топологической степени отображения (ряд работ Кронина; например, см. РЖМат, 1954, 2177).

Автор рассматривает случай, когда $\Phi(x, y) = L(x) + F(x, y)$, где L — такой линейный оператор, действующий в $\mathfrak{X}$, что размерности пространств U и U^* нулей операторов L и L^* конечны и одинаковы, а функция $F(x, y)$ определена и непрерывна при малых x, y и удовлетворяет неравенству $\| F(x_1, y) - F(x_2, y) \| \leqslant M(x_1, x_2, y) \cdot \| x_1 - x_2 \|$, где $M(x_1, x_2, y) \to 0$ при $\| x_1 \| \to 0$, $\| x_2 \| \to 0$, $\| y \| \to 0$. По уравнению

$$L(x) + F(x, y) = 0 \qquad (1)$$

конструируется уравнение разветвления

$$ZF[V_y(u), y] = 0, \qquad (2)$$

в котором $x = V_y(u)$ определяется как решение уравнения $x + RF(x, y) = u$, Z — некоторый конечномерный проекционный оператор, R — линейный оператор, удовлетворяющий условию $LR = I - Z$. Уравнение (2) рассматривается в конечномерном пространстве U нулей оператора L. Показывается, что при малых y по решениям уравнения (2) можно построить малые решения уравнения (1). В случае, когда пространство U одномерно, уравнение (2) превращается в уравнение с одним неизвестным скаляром.

В этом случае, если функция $F(x, y)$ при малых фиксированных y аналитична относительно x и если $\| F(x, y) - F(x, 0) \| \leqslant m \| y \|$ при малых x, y, то уравнение (2) принимает вид

$$0 = \sum_{i=2}^{\infty} a_i \xi^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i(y) \xi^i.$$

Пусть k — наименьший номер такой, что $a_k \neq 0$. Показано, что в этом случае при малых y уравнение (1) имеет ровно k решений, считая их кратности.

В основной части работы предполагается, что для $F(x, y)$ справедливо разложение Тейлора

$$F(x, y) = \sum_{i+j=1}^{m} F_{ij}(x, y) + \sum_{i+j=m} T_{ij}(x, y), \; m \geqslant 2,$$

где $F_{ij}(x, y)$ — непрерывные операторы, однородные относительно x порядка i и относительно y порядка j, а

$$\lim_{x, y \to 0} T_{ij}(x, y) / \| x \|^i \cdot \| y \|^j = 0,$$

причем $T_{ij}(x, y)$ непрерывно дифференцируемы по x в окрестности нуля. Для этого случая специальным методом (Dieudonné J., Arch. Math., 1949—1950, 2, 49—55) подробно исследуется уравнение разветвления. В результате получены различные условия, при выполнении которых решение уравнения (1) единственно. При других условиях уравнение (1) не имеет малых решений. Указаны особо условия, при выполнении которых существуют вещественные решения. Все условия сформулированы в терминах, относящихся к коэффициентам разложения по формуле Тейлора левой части уравнения разветвления.

В качестве приложения рассмотрен вопрос о малых решениях уравнения

$$\varphi''(t) + \omega^2 \varphi(t) + f[t, \varepsilon, \varphi(t), \varphi'(t)] = 0$$

при краевых условиях $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$.
М. А. Краснодельский

3735. К теории линейных интегро-дифференциальных уравнений. Быков Я. В., Докл. АН УзССР, 1953, № 8, 3—6 (русск.; резюме узб.)

Рассматривается система интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_i(x)}{dx} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x) z_k(x) -$$

$$- \lambda \int_a^x \sum_{j=1}^{n} K_{ij}(x, t) z_j(t) \, dt = 0 \; (i = 1, \ldots, n), \qquad (1)$$

где $a_{ik}(x)$ непрерывны на сегменте $[c, d]$, содержащем точку a; $K_{ij}(x, t)$ могут иметь в квадрате

$$c \leqslant \begin{matrix} x \\ t \end{matrix} \leqslant d$$

разрывы, допускаемые в теории линейных интегральных уравнений. Систему частных решений, вронскиан которой не равен тождественно нулю, автор называет фундаментальной системой. В отличие от системы линейных дифференциальных уравнений, вронскиан фундаментальной системы решений у системы линейных интегро-дифференциальных уравнений может для различных значений λ обращаться в нуль в любой точке сегмента

$[c, d]$, отличной от точки a, являющейся нижним пределом интегралов, входящих в систему (1).

В работе рассматривается решение задачи Коши для системы (1), причем начальные условия Коши могут задаваться в любой точке сегмента $[c, d]$. Приводится без доказательства ряд теорем. Например, решение задачи Коши для любых начальных значений в некоторой точке всегда существует и единственно, если в данной точке вронскиан не обращается в нуль (вронскианы всех фундаментальных систем в данной точке одновременно или не равны нулю, или равны нулю). Если в какой-либо точке вронскиан какой-либо фундаментальной системы (а следовательно, и любой фундаментальной системы) обращается в нуль, то при одних начальных условиях в этой точке задача Коши не имеет решения и имеет бесконечное число решений при других данных; при любых начальных данных в любой точке сегмента $[c, d]$ задача Коши имеет единственное решение для достаточно малых значений λ.

Для системы (1) строится система линейных интегральных уравнений, которая в матричной форме имеет вид

$$F(x) = \lambda \int_a^x \int_{x_0}^t H(x, u, t) F(u)\, du\, dt, \qquad (2)$$

где

$$F(x) = \left\| \begin{matrix} f_1(x) \\ \cdot \cdot \cdot \\ f_n(x) \end{matrix} \right\|,$$

а

$$H(x, u, t) = \| H_{ik}(x, u, t) \|_1^n,$$

причем

$$H_{ik}(x, u, t) = \sum_{m=1}^{n} K_{im}(x, t) \frac{\Delta_{mk}(u, t)}{\Delta(u)},$$

$\Delta(x) = |y_{ki}(x)|$ — вронскиан какой-либо фундаментальной системы решений системы (1), а

$$\Delta_{ik}(u, x) = \begin{vmatrix} y_{11}(u) & \cdot \cdot \cdot & y_{n1}(u) \\ \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ y_{1,\,k-1}(u) & \cdot \cdot \cdot & y_{n,\,k-1}(u) \\ y_{1i}(x) & \cdot \cdot \cdot & y_{ni}(x) \\ y_{1,\,k+1}(u) & \cdot \cdot \cdot & y_{n,\,k+1}(u) \\ \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \\ y_{1n}(u) & \cdot \cdot \cdot & y_{nn}(u) \end{vmatrix}$$

Если λ не является собственным значением системы (2), то задача Коши при любых начальных данных в точке x_0 имеет единственное решение. Если же вронскиан какой-либо фундаментальной системы решений системы (1) при фиксированном λ в точке x_0 обращается в нуль, то это значение λ является собственным значением системы (2).

В работе имеются опечатки. Так, на странице 3 напечатано $[c, \alpha]$ вместо $[c, d]$; на странице 5 вместо $|z(\sqrt{2})| = 0$ напечатано $|z(\sqrt{2})| \neq 0$. В приведенном примере $\lambda = -1$ является собственным значением не только при $x_0 = \sqrt{2}$, но и при $x_0 = -\sqrt{2}$. *Б. М. Гагаев*

3736 РЕЦ. Интегральные уравнения и преобразование Лапласа. Пародн (Équations intégrales et transformation de Laplace. Parodi M., 125 pp., Publication du Ministère de l'Air, P., 1950, 800 fr.) [**Рецензия: Рубо-Валетт** (Roubaud-Valette J.), J. phys. et radium, 1953, **14**, № 10, 559—560 (франц.)]

См. также: 3673, 3718, 3737, 3753, 3769

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3737.* О вариационных методах в теории столкновений и в теории диффракции. Кахан (Sur les méthodes variationnelles dans la théorie des collisions et de la diffraction. Kahan Théo), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 10, 1000—1003 (франц.)

Развивая идею Куранта (Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. I, Изд-во техн.-теор. лит-ры, М.—Л., 1951, стр. 181), автор рассматривает вариационную задачу о нахождении экстремума выражения

$$J[\varphi] = \frac{(\varphi, H\varphi - \varphi)}{(\varphi, f)^2}$$

при дополнительном условии $(\varphi, f) = 1$, где $H = \int_\Gamma K(s, t) \{\,\}\, dt$ и (φ, f) — скалярное произведение функций φ и f.

В качестве уравнения Эйлера этой вариационной задачи будет уравнение

$$\varphi(t) = \lambda f(t) - \int_\Gamma K(s, t) \varphi(s)\, ds,$$

где λ — множитель Лагранжа.

Отмечается, что к рассматриваемой вариационной задаче приводят физические проблемы о столкновении и о диффракции. Краевые задачи, к которым сводятся эти явления, при помощи функции Грина преобразовываются в соответствующие интегральные уравнения. *М. К. Керимов*

3738. Искривление лучей и скорость волн. Кунц (Strahlenkrümmung und Wellengeschwindigkeit. Kunz B.), Geofis. pura ed appl., 1953, **26**, 10—15 (нем.; резюме англ.)

Как известно, согласно принципу Ферма распространение волновых процессов в неоднородной среде описывается задачами вариационного исчисления. Здесь рассматриваются несколько задач из сейсмологии и астрономии, сводящихся к элементарным вариационным задачам, и даются их решения. *М. К. Керимов*

См. также: 3697

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

3739. О бесконечно дифференцируемых функциях. Розентал (On functions with infinitely many derivatives. Rosenthal Arthur), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 4, 600—602 (англ.)

Автор дает новое доказательство теоремы Бореля о том, что для любой последовательности чисел можно подобрать бесконечно дифференцируемую функцию такую, что значения ее последовательных производных в какой-либо точке равны числам этой последовательности. *М. А. Евграфов*

3740. Хаусдорфовы средние с выпуклыми весовыми функциями. Уолл (Hausdorff means with convex mass functions. Wall H. S.), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 4, 637—639 (англ.)

Автор пользуется в готовом виде (без пояснения) основными понятиями, обозначениями и терминологией, принятыми в его предыдущей работе (Garabedian H. L., Hille Einar, Wall H. S., Duke Math. J., 1941, 8, 193—213).

Доказывается теорема:

Пусть $[H, \varphi]$ — регулярный метод Хаусдорфа и $(C, 1)$ — метод Чезаро первого порядка. Тогда эквивалентны утверждения:

(а) $[H, \varphi]$ включает $(C, 1)$;

(б) $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 + i\varphi_3 - i\varphi_4$, где φ_1, φ_2, φ_3 и φ_4 — неотрицательные, неубывающие выпуклые функции на $[0,1]$. (Здесь $[H, \varphi]$ совпадает с $[H, \mu]$ (Харди Г., Расходящиеся ряды, Из-во иностр. лит-ры, М., 1951, гл. XI), где $\mu_n = \int_0^1 x^n d\varphi(x)$, $\varphi(x)$ — регулярная функция с ограниченным изменением. *Прим. реф.*).

При доказательстве используются некоторые элементарные свойства выпуклых функций и следующее основное предложение (см. цитированную работу):

Для того чтобы выполнялось соотношение (а), необходимо и достаточно, чтобы существовала регулярная весовая функция f такая, что

$$\varphi(x) = f(x) + x\int_x^1 \frac{1}{t}\, df(t),$$

где $x > 0$.

В изложении автор отступает от широко распространенного обозначения, — пишет «интервал $[0,1]$», «сегмент (a, b)». *М. П. Щеглов*

3741. Некоторые интегралы по выпуклым множествам. Роджерс (Certain integrals over convex sets. Rogers C. A.), J. London Math. Soc., 1953, **28**, ч. 3, № 111, 293—297 (англ.).

Пусть X — точка n-мерного евклидова пространства E_n, $|X|$ — ее расстояние от начала координат. Если S обозначает единичную сферу $|X| \leqslant 1$, то для любого замкнутого выпуклого множества $K \subset E_n$, имеющего лебеговскую n-мерную меру $\mu(K)$, меньшую, чем $\mu(S)$, автор доказывает неравенство

$$\int_K \rho(|X|)\, d\mu \leqslant \int_{S(K)} \rho(|X|)\, d\mu,$$

в котором $\rho(t)$ — произвольная неотрицательная и неубывающая на $(0,1)$ функция, обращающаяся в нуль при $t > 1$, а $S(K)$ — сегмент сферы, отсекаемый от S некоторым $n-1$-мерным пространством так, что $\mu[S(K)] = \mu(K)$.

Для доказательства используется процесс сферической симметризации множеств и одна примыкающая сюда лемма, принадлежащая Е. Шмидту (Schmidt E., Math. Nachr., 1948, **1**, 81—157).

А. Ф. Тиман

3742. Заметка о последовательности функций, определенных разностным уравнением. Багчи, Мукхерджи (Note on a sequence of functions, defined by a difference-equation. Bagchi Hari Das, Mukherji Bhola Nath), Simon Stevin, 1951—1952, **29**, № 4, 185—189 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Рассматривается система уравнений

$$(a_1 n + b_1) f_{n+1}(z) + (a_2 n + b_2) f_n(z) + (a_3 n + b_3) f_{n-1}(z) = 0 \qquad (1)$$

где $n = 1,2, \ldots$ — целое, коэффициенты a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3 — аналитические функции от z. Показывается, что если $\{f_n(z)\}$ — последовательность аналитических решений уравнения (1), то функция

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} h^n f_n(z) \qquad (2)$$

(которую можно назвать порождающей эти решения) удовлетворяет уравнению

$$(a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3)\frac{\partial V}{\partial h} + \{(b_1 - a_1) + b_2 h + (a_3 + b_3) h^2\} V = a_1 h f_1(z) + (b_1 - a_1)\{f_0(z) + h f_1(z)\} + b_2 h f_0(z), \qquad (3)$$

которое и решается. Рассматривается также вопрос о радиусе сходимости ряда (2). Частными случаями соотношения (1) являются рекуррентные формулы для полиномов Эрмита, Лагерра, Чебышева и др. Имея это в виду, можно из уравнения (3) найти соответствующие порождающие функции.

А. А. Миролюбов

3743. О некотором всегда сходящемся итерационном процессе. Таргонский (An always convergent iteration process. Targonszki G.), Acta. math. Acad. sci. hung., 1953, **4**, № 1—2, 119—126 (англ.)

В работе дается итерационный метод, сходящийся для всех непрерывных функций.

Если функция $f(z)$ непрерывна в секторе S: $|z| \leqslant K$, $\varphi_0 \leqslant \arg z \leqslant \varphi_1$, то итерация функции $\vartheta(z) = zF[\gamma\rho_{-1}(|f(z)|)]$ дает сходящуюся для всех $z \in S$ итерационную последовательность $\{\vartheta_n(z)\}$. Здесь $F(z)$ и $\rho(x)$ — надлежащим образом выбранные монотонные функции, $\rho_{-1}(x)$ обратная функция для $\rho(x)$, γ — некоторый параметр. В случае если

$$\sup_{z_1 z_2 \in S} |f(z_2) - f(z_1)| \leqslant c\,|z_2 - z_1|^{\alpha},$$

можно положить

$$\rho(x) = cx^{\alpha},\ F(x) = \frac{1}{1+x}\ .$$

Последовательность $\{\vartheta_n(z)\}$ сходится по фиксированному радиусу к ближайшему корню, а в случае отсутствия последнего — к нулю. Дается прием убыстрения итерационного процесса. На основании доказанных общих теорем строится итерационная последовательность для многочлена. Доказывается, что отсутствие корней функции $f(z)$ на данном радиусе равносильно сходимости ряда $\sum_0^{\infty} \vartheta_n(z)$, при условии $f(0) \neq 0$. Доказывается, что существует последовательность таких замкнутых звездообразных кривых, что часть сектора S, ограниченная каждой кривой, содержит все последующие кривые и содержит все корни, находящиеся в области, ограниченной первой кривой. Отсюда делается вывод об оценке корней многочлена: нули многочлена $P(z) = \sum_{n=0}^{m} a_n z^n$ все лежат внутри кривой

$$r = \frac{k}{1 + \dfrac{|P(ke^{i\varphi})|}{\sum_{n=1}^{m} n\,|a_n|\,k^n}},$$

$$k = 1 + \frac{\max(|a_0|, \ldots, |a_{m-1}|)}{|a_m|}\ .$$

С. П. Пулькин

3744. Суммирование рядов Фурье при помощи преобразования Лапласа, Манн (Summation von Fourierschen Reihen mittels der Laplaceschen Transformation. Mann Paul August), Arch. elektr. Übertrag, 1953, **7**, № 8, 390—392 (нем.)

Автор находит суммы некоторых известных рядов Фурье, при этом он некритически пользуется расходящимися рядами, интегралами и особенно формулой Пуассона (Зигмунд, Тригонометрические ряды, ГОНТИ, М.—Л., 1939, стр. 43). Рассматриваемые вопросы имеют связь с теорией электрических цепей. *Ф. В. Широков*

3745 РЕЦ. Неравенства. Харди, Литлвуд, Пойа (Inequalities. Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G., 2-nd ed., 324 blz., Cambridge University Press, 1952, 27 s. 6 d.) [Рецензия: **Вёйтс** (Wuyts P.), Simon Stevin, 1951—1952, **29**, № 4, 233—234 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (голл.)]

3746 РЕЦ. Лекции по дифференциальному и интегральному исчислению. Вьеторис (Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. Vietoris L., Universitätsverlag Wagner, Innsbruck, 1951) [Рецензия: **Хонеггер** (Honegger Walter), Elem. Math., 1953, **8**, № 6, 143—144 (нем.)]

3747 РЕЦ. Основы анализа. Ричмонд (Fundamentals of the calculus. Richmond Donald E., IX + 233 pp., McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1950, 3.00 doll.) [Рецензия: **Херт** (Hurt J. M.), Math. Mag., 1953, **27**, № 1, 50 (англ.)]

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

3748. О произведении двух методов суммирования. Сас (On the product of two summability methods. Szász O.), Roczn. Polskiego towarz. mat., (Ann. Soc. polon. math.), 1952, **25**, 75—84 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Пусть T_1, T_2 — два метода суммирования последовательностей. Последовательность $\{s_\nu\}$ называется суммируемой T_1T_2, если ее T_2-трансформация суммируема T_1. Доказывается, что суммируемость T_1 влечет за собой суммируемость T_1T_2 для следующих методов суммирования T_1 и T_2: 1) метода Абеля и метода Хаусдорфа; 2) метода Бореля и метода Хаусдорфа; 3) метода Бореля и метода Z_k; 4) метода Абеля и метода (γ, r).

Средние Хаусдорфа, Z_k-средние и (γ, r)-средние последовательности $\{s_\nu\}$ определяются соответственно равенствами:

$$h_n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} s_\nu \int_0^1 r^\nu (1-r)^{n-\nu} d\psi(r),$$

$\psi(r)$ — функция с ограниченным изменением в $0 \leqslant r \leqslant 1$;

$$Z_n = \frac{1}{k+1}(s_{n-k} + s_{n-k+1} + \ldots + s_n)$$

$$(s_{-\nu} = 0 \text{ для } \nu > 0);$$

$$\gamma_n^{(r)} = r^{n+1} \sum_{\nu=n}^{\infty} \binom{\nu}{n} (1-r)^{\nu-n} s_\nu,\ 0 < r < 1.$$

Приводится также пример двух регулярных методов суммирования T_1, T_2, для которых суммируемость T_1 не влечет за собой суммируемости T_1T_2. *М. Д. Калашников*

3749. Суммы специальных бесконечных рядов. Гампль (Součet speciálních nekonečných řad. Hampl Miloslav), Elektrotechn. obzor, 1953, **42**, № 12, 697—698 (чеш.)

Разлагая в ряд Фурье периодические функции, совпадающие с $e^{\alpha x}$ на интервалах $(0, 2\pi)$ и $(-\pi, \pi)$, и дифференцируя по α полученные разложения, автор находит суммы некоторых числовых рядов. *Ф. В. Широков*

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

3750 РЕЦ. Гамма-функция и родственные функции с особым учетом их приложений. Лёш, Шоблик (Die Fakultät (Gammafunktion) und verwandte Funktionen mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendung. Lösch F., Schoblik F., 205 S., 22 Bild., Leipzig, B. G. Teubner (jetzt Stuttgart), 1951, 16.80 DM) [Рецензия: **Бертрам** (Bertram G.), Forsch. Gebiete Ingenieurwesens, 1953, **19**, № 2, Ausg. B., 62 (нем.)]

3751 РЕЦ. Основы теории бигармонических полиномов. Цвейлинг (Grundlagen einer Theorie der biharmonischen Polynome. Zweiling K., 89 S., ill., VEB Verlag Technik, Berlin, 1952, 13.50 DM) [**Рецензия: Хампе** (Hampe E.), Fertigungstechnik, 1953, **3**, № 10, 428 (нем.)]

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3752. Метод Паде, измененный для лучшей аппроксимации оригинала. Тисдейл (Time domain approximation by use of Padé approximants. Teasdale R. D.), Conven. Rec. Inst. Radio Engrs, 1953, **5**, 89—94 (англ.)

Изображение $F(z)$ функции $f(t)$, полученное в результате применения к $f(t)$ преобразования Лапласа, аппроксимируется рациональной функцией $G(z)$ так, чтобы ее оригинал (в том же преобразовании) $g(t)$ мало отличался от $f(t)$. Паде (Padé H., Ann. École Norm., 1892, **9**, 1—93) предложил аппроксимировать $F(z)$ путем ее разложения в ряд по степеням z и подбора рациональной функции $G(z) = N(z) / D(z)$ (степень числителя p, степень знаменателя q) так, чтобы члены разложений $F(z)D(z)$ и $N(z)$ совпадали до члена с z^{p+q}.

В статье предлагается аппроксимировать таким образом не $F(z)$, а $F_1(z) = F[(1-z)/(1+z)] \times (1+z)^{-m}$, где степень m такова, что $F_1(-1) \neq 0$, а затем при помощи замены переменного получить рациональную функцию, аппроксимирующую $F(z)$. Это дает лучшие результаты с точки зрения близости друг к другу оригиналов $f(t)$ и $g(t)$, чем метод Паде в его первоначальном виде.

М. Л. Бродский

3753. Алгебраизация конечного преобразования Гильберта. Зёнген (Algebraisierung der endlichen Hilbert-Transformation. Söhngen H.), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 8—9, 280—281 (нем.)

Рассматривается преобразование

$$\mathfrak{T}\{F(x)\} = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-s} F(x)\,dx = f(s),$$

переводящее функцию $F(x)$ класса L^p $(p>1)$ в регулярную аналитическую в полосе $|\operatorname{Re} s| < 1 - 1/p$ функцию $f(s)$. Это преобразование обратимо, причем имеет место формула

$$F(x) = \frac{2}{1-x^2} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-iT}^{iT} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{s} f(s)\,ds.$$

Преобразование $\mathfrak{T}$ позволяет алгебраизировать конечное преобразование Гильберта

$$\mathfrak{H}\{F(x)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{F(\xi)}{x-\xi}\,d\xi \quad (-1<x<1)$$

подобно тому, как преобразование Лапласа алгебраизирует операцию дифференцирования. Именно, последовательное применение преобразований $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{T}$ дает:

$$\mathfrak{T}\{\mathfrak{H}\{F(x)\}\} = \operatorname{ctg} \pi s \cdot f(s) - \frac{f(0)}{\sin \pi s}.$$

Изложенное используется для решения интегрального уравнения

$$F(x) + \lambda \mathfrak{H}\{F(x)\} = G(x),$$

где $G(x)$ — данная функция из класса L^p $(p>1)$ λ — комплексное число, не лежащее в интервал от $-i$ до $+i$, а $F(x)$ — неизвестная функция, которая ищется в классе $L^{1+\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$.

Применяя к обеим частям рассматриваемого уравнения преобразование $\mathfrak{T}$, выражая из полученного таким путем алгебраического уравнения функцию $f(s)$ и переходя от $f(s)$ к $F(x)$ при помощи обратного преобразования $\mathfrak{T}^{-1}$, автор получает общее решение в следующем виде:

$$F(x) = \frac{1}{1+\lambda^2} G(x) -$$

$$- \frac{\lambda}{1+\lambda^2} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{1-\xi}{1+x} \left(\frac{1-\xi}{1+\xi} \cdot \frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha} \frac{G(\xi)}{x-\xi}\,d\xi +$$

$$+ \frac{\lambda}{\pi} f(0) \cos \pi\alpha \cdot \frac{1}{1-x} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\alpha},$$

где $\frac{1-i\lambda}{1+i\lambda} = e^{2\pi i\alpha}$, $-1<\operatorname{Re}\alpha<0$, а $f(0)$ произвольно.

В качестве примера приводится решение встречающегося в теории упругости уравнения $F(x) = \varepsilon k - ik\mathfrak{H}\{F(x)\}$, где ε и k — постоянные.

М. А. Гольдман

3754. Об операционном исчислении. Микусинский (O rachunku operatorów. G.-Mikusiński J.), Zastosow. mat., 1953, **1**, № 1, 28—40 (польск.; резюме русск., англ.)

Популярное изложение нового построения операционного исчисления: исходным материалом служит кольцо непрерывных функций, заданных на полупрямой $0 \leqslant t < +\infty$ с обычными суммой и разностью, но с умножением в виде «свёртки»:

$$\int_0^t a(t-\tau)\,b(\tau)\,d\tau.$$

Над этим кольцом (не имеющим, как известно, делителей нуля) строится поле дробей, называемых операторами. Среди операторов содержатся и обычные функции и обычные операторы; например, дифференцирование или интегрирование обычной функции будет осуществляться умножением или делением на некоторый элемент поля (соответствующий оператору p Хевисайда). Различие между оригиналом и изображением исчезает: они соединяются в одном элементе поля. Исследования в этом направлении ведутся в Государственном математическом институте Польши. Более полное изложение результатов было опубликовано автором ранее (Studia math. (Warszawa), 1949, **11**, 41—70).

М. К. Фаге

3755. Об операционном исчислении с двумя переменными. Чакрабарти (Sur le calcul symbolique à deux variables. Chakrabarty N. K.)

Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1953, **67**, № 1, 23—27 (франц.)

Доказывается, что если

$$pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-px-qy}f(x,y)\,dx\,dy=\varphi(p,q)\subset\subset f(x,y),$$

то

$$f(x^2,y^2)\supset\supset\frac{pq}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{p^2s^2}{4}-\frac{q^2t^2}{4}}\varphi\left(\frac{1}{s^2},\frac{1}{t^2}\right)ds\,dt\quad(1)$$

при условии, что этот двойной интеграл сходится. Без доказательства приводится утверждение, что если $\varphi(u,v)\subset\subset h(x,y)$ и $g(x)\supset\psi(u)$, то

$$\int_0^\infty\frac{\varphi(u,v)\,g(u)}{uv}\,du=\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{h(x,y)\,\psi(x)}{x}\,e^{-vy}dxdy\quad(2)$$

при условии, что $h(x,y)=O(x^{\mu_1})$ $(x\to+0)$, $h(x,y)=O(y^{\mu_2})$ $(y\to+0)$, $h(x,y)=O(e^{-\lambda_1 x})$ $(x\to\infty)$, $h(x,y)=O(e^{-\lambda_2 y})$ $(y\to\infty)$, где $\mu_1>0$, $\mu_2>0$, $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$; $g(x)=O(x^{\mu})$ $(x\to+0)$ $g(x)=O(e^{-\lambda x})$ $(x\to\infty)$, $\mu>0$, $\lambda>0$.

Формулы (1) и (2) применяются к гипергеометрическим и бесселевым функциям. Например, частным случаем (2) является соотношение

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-vy}\,I_0(\sqrt{2xy})J_0(\sqrt{2xy})\,\frac{dx\,dy}{\sqrt{1+x^2}}=$$
$$=\frac{1}{v}\,I_0\left(\frac{1}{2v}\right)K_0\left(\frac{1}{2v}\right).$$

В. И. Левин

3756. Замечание о преобразовании Лапласа. **Аспейтия** (Note on a Laplace transform. Azpeitia A. G.), Gac. mat., 1953, 5, 6—7 (исп.)

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 10, 977.

3757. О некоторых интегральных представлениях вещественных функций. **Обрешков** (Върху някои представяния с интеграли на реални функции. Обрешков Никола), Изв. матем. ин-та (Бълг. АН), 1953, **1**, № 1, 83—110 (болг.; резюме русск.)

Рассматриваются интегральные преобразования

$$f(x)=\int_0^\infty\Phi(xt)\,\varphi(t)\,dt,\quad(1)$$

$$f(x)=\int_0^\infty\Phi(xt)\,d\omega(t),\quad(1')$$

где

$$\Phi(x)=\int_0^\infty e^{-\frac{x}{t}-t}\,t^{\delta-1}\,dt\;(\delta>0),$$

и устанавливаются для них формулы обращения, аналогичные известной формуле Поста-Уиддера для обращения интеграла Лапласа. Например, для (1) доказывается, что во всякой точке Лебега функции $\varphi(t)$ (т. е. в такой точке α, для которой при $h\to0$ $\int_\alpha^{\alpha+h}|\varphi(t)-\varphi(\alpha)|\,dt=o(h)$) справедливо предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{2^n}}{2\pi n^{\delta-1}\alpha^{n+1}}\,f_n\left(\frac{n^2}{\alpha}\right)=\varphi(\alpha),$$

где

$$f_0(x)=f(x),\ f_n(x)=x^{\delta}\frac{d}{dx}\,[x^{1-\delta}f'_{n-1}(x)]\,(n\geqslant1).\quad(2)$$

Затем доказывается следующая теорема, аналогичная теореме С. Н. Бернштейна о представлении абсолютно монотонных функций: для того чтобы $f(x)$ $(0\leqslant x<\infty)$ была представима в виде (1′) с неубывающей ограниченной функцией $\omega(t)$, необходимо и достаточно, чтобы $f_n(x)\geqslant0$ $(x>0;\ n=0,1,2,\ldots)$, $f(0)=f(+0)$, где $f_n(x)$ определяются формулами (2).

Автор замечает, что функция $\Phi(x)$ является решением дифференциального уравнения $xy''-(\delta-1)y'-y=0$, и указывает, что его результаты переносятся на некоторые другие функции $\Phi(x)$, являющиеся решениями линейных дифференциальных уравнений. *Б. И. Коренблюм*

3758 РЖ. Преобразование Лапласа и его применение. **Функ, Саган, Зелиг** (Die Laplace-Transformation und ihre Anwendung. Funk P., Sagan H., Selig F., VII + 106 S., Ill, Wien: F. Deuticke, 1953, 50 S.) [**Рецензия: Главка** (Hlawka E.), Österr. Ingr-Arch., 1953, **7**, № 4, 370 (нем.)]

См. также: 3568, 3663, 3664, 3667, 3699, 3709, 3714, 3718, 3725, 3728, 3734, 3736, 3760, 3765, 3766, 3770, 3854, 3862

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

3759. О равенстве Парсеваля для почти периодических векторов. **Маурин** (On Parseval equation for almost periodic vectors. Maurin K.), Studia math. (Warszawa), 1953, **13**, № 1, 83—86 (англ.)

Вейлю принадлежит следующее обобщение понятия почти периодической функции (Weyl H., Amer. J. Math., 1949, **71**, № 1, 178—205). Пусть $\mathfrak{H}$ гильбертово пространство (вообще говоря, неполное), подвергающееся действию группы Σ линейных преобразований $\sigma,\tau,\ldots$. Для элементов $\mathfrak{H}$, помимо нормы $\|f\|=(f,f)^{1/2}$, введена норма $\|f\|_1$, обладающая обычными свойствами и такая, что $\|f\|\leqslant\|f\|_1$; при этом $(\sigma f,\sigma f)=(f,f)$ и $\|\sigma f\|_1=\|f\|_1$ $(f\in\mathfrak{H},\ \sigma\in\Sigma)$. Вектор $f\in\mathfrak{H}$ называется почти периодическим, если группа Σ, метризован-

ная при помощи расстояния $\rho(\sigma, \tau) = \|\sigma f - \tau f\|_1$, компактна. Центральным фактом теории Вейля является следующая теорема (равенство Парсеваля): каждому почти периодическому вектору f отвечает не более чем счетная последовательность попарно ортогональных и инвариантных относительно Σ конечномерных подпространств $\mathfrak{H}_\varkappa \subset \mathfrak{H}$ таких, что

$$f = \sum_{\nu} (f, g_\nu) g_\nu,$$

где $g_{n_\varkappa+1}, \ldots, g_{n_{\varkappa+1}}$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{H}_\varkappa$.

В реферируемой статье дается весьма простое доказательство этой теоремы. Идея доказательства близка к известной модификации вейлевского доказательства равенства Парсеваля для почти периодических функций, использующей спектральное разложение вполне непрерывных операторов.

Помимо нескольких опечаток, в статье имеется следующая погрешность: сопряженный оператор к F (стр. 84, формула 2.1) равен не $(\sigma f, h)$, а $(h, \sigma f)$; в связи с этим несколько видоизменяются дальнейшие выкладки. *Ю. М. Березанский*

3760. Полуограниченные матрицы. Мак-Нерни (Half-bounded matrices. MacNerney J. S.), J. Indian Math. Soc. (N. S.), 1952, **16**, 151—176 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Численная область изменения $W(A)$ матрицы A определяется как такое множество S, что $w \in S$, если существует натуральное число n и последовательность $(x_1, \ldots, x_n)$ комплексных чисел такие, что

$$\sum_{p=1}^{n} |x_p|^2 = 1 \quad \text{и} \quad w = \sum_{p,\, q=1}^{n} x_p A_{pq} \overline{x}_q.$$

Полуограниченная матрица — это такая матрица M, что $W(M)$ не совпадает со всей плоскостью; так как численная область изменения есть выпуклое множество, то полуограниченность матрицы M означает, что ее численная область изменения содержится в некоторой полуплоскости. Следовательно, всякая ограниченная матрица и всякая эрмитова матрица полуограничены, и матрица, ассоциированная с положительно определенной J-дробью, полуограничена.

В этой статье по теории бесконечных матриц речь идет о: 1) существовании ограниченной обратной матрицы к $zI - A$, где A полуограничена и вполне квадрируема, а z находится на положительном расстоянии от $W(A)$; 2) распространении теории стилтьесовских преобразований неубывающих функций, главным образом в связи с J-дробями и проблемой моментов, на теорию стилтьесовских преобразований «неубывающих матриц», главным образом в связи с вполне квадрируемыми и полуограниченными матрицами и матричной проблемой моментов; 3) применении предыдущего к некоторым задачам, относящимся к эквивалентным функциям, отвечающим положительно определенным J-дробям.

Ниже дается краткое изложение некоторых из этих результатов.

Предположим, что A — полуограниченная и вполне квадрируемая матрица, а $d(z)$ — расстояние z от $W(A)$. При $d(z) > 0$ существует матрица $B(z)$ регулярных функций, которая ограничена числом $1/d(z)$, симметрична, если A симметрична, и обратна к $zI - A$. Обратная $B(z)$ к $zI - A$ для z в некотором неограниченном множестве Z определяет A в различных асимптотических смыслах, зависящих от типов предполагаемой ограниченности $B(z)$. Например, если $B(z)$ имеет норму $b/|z|$, где b — положительное число, то $z[zB(z)_{pq} - I_{pq}] \to A_{pq}$ при $z \to \infty$ в Z. Эти результаты распространены на матрицы, обратные к $zI - A - E(z)$, где $E(z)$ — полуограниченная матрица регулярных функций.

Неубывающая матрица есть матрица $G(t)$ комплекснозначных функций действительного переменного t таких, что

$$\sum_{p,\, q=1}^{n} x_p G(t)_{pq} x_q$$

представляет собой ограниченную неубывающую функцию $g(t)$ действительного параметра t ($n = 1, 2, \ldots$; x_r — произвольные комплексные числа) и $g(t) \equiv g(t+) - g(-\infty)$.

Единичная неубывающая матрица — это такая неубывающая матрица $G(t)$, что $G(+\infty) = I$. Если $F(z)$ — матрица комплекснозначных функций, определенных при $\operatorname{Im} z > 0$, то для того чтобы

$$\sum_{p,\, q=1}^{n} x_p F(z)_{pq} \overline{x}_q \quad (n = 1, 2, \ldots; x_r \text{ — произвольные комплексные числа})$$

была функцией $f(z)$, регулярной при $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Im} f(z) \leqslant 0$ и такой, что $zf(z)$ ограничена при $\operatorname{Im} z \to +\infty$ и $\operatorname{Re} z = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $F(z)$ была стилтьесовским преобразованием $\int_{-\infty}^{\infty} (z-t)^{-1}\, dG(t)$ неубывающей матрицы $G(t)$. Известное достаточное условие того, чтобы функция $f(z)$, регулярная при $\operatorname{Im} z > 0$, была стилтьесовским преобразованием неубывающей функции g, где $g(+\infty) - g(-\infty) = 1$, распространяется до необходимого и достаточного условия

$$|f(z) - (z - \overline{z})^{-1}| \leqslant |(z - \overline{z})^{-1}| \text{ при } \operatorname{Im} z > 0,$$

и, кроме того, получается аналог этого условия для матриц.

Если $F(z)$ — стилтьесовское преобразование единичной неубывающей матрицы $G(t)$,

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} t\, dG(t), \quad B = \int_{-\infty}^{\infty} t^2\, dG(t)$$

и B ограничена, то существует неубывающая матрица $E(t)$ такая, что

$$E(+\infty) = B - AA,$$

и $zI - A - \int_{-\infty}^{\infty} (z-t)^{-1}\, dE(t)$ при $\operatorname{Im} z > 0$ есть ограниченная обратная к $F(z)$.

Задачи о J-дробях относятся к двум гипотезам на стр. 318 книги референта «Analytic theory of continued fractions» (Van Nostrand, New York, 1948).

Имеется также добавление к теореме 84.1 стр. 316. *Уолл (H. S. Wall)*

Из. Math. Rev., 1953, 14, № 7, 626—627.

3761. Разложение в степенной ряд унитарного оператора $U(t, t_0)$. Ма (Power-series expansion of the unitary operator $U(t, t_0)$. Ма S. T.), Phys. Rev., 1953, **91**, № 2, 392 (англ.)

Ставится вопрос о сходимости метода последовательных приближений для определения решения $U(t, t_0)$ операторного дифференциального уравнения

$$i\frac{d}{dt}U(t, t_0) = H_1(t)\,U(t, t_0),\quad U|_{t=t_0} = 1, \qquad (1)$$

где $U(t, t_0)$ — унитарный оператор; как известно, разложение в ряд для тесно связанного с $U(t, t_0)$ оператора

$$R(\xi) = i\int_0^\infty \exp[i(\xi - H)t - \varepsilon t]\,dt = (H - \xi - i\varepsilon)^{-1} \qquad (2)$$

часто расходится.

Автор рассматривает частный случай этой задачи, а именно одномерное движение частицы с массой $m = 1/2$ в поле с потенциалом $-2b\delta(x)$, где δ — дельта-функция в импульсном пространстве, и получает формулы, из которых следует, что в рассматриваемом случае волновые функции, S-матрица и R являются мероморфными функциями от b, тогда как U есть целая функция от b; последнее обстоятельство оправдывает метод последовательных приближений для (1) в рассматриваемом случае. В этой связи автор ставит вопрос об исследовании аналитической природы оператора $U(t, t_0)$ в общем случае. *М. А. Наймарк*

3762. Абстрактные теоремы Кронекера и почти периодические функции. Хартман, Рылл-Нардзевский (Théorèmes abstraits de Kronecker et les fonctions presque périodiques. Hartman S., Ryll-Nardzewski C.), Studia math. (Warszawa), 1953, **13**, № 2, 296—310 (франц.)

Будем говорить, что характеры $\chi_1, \ldots, \chi_n$ группы G связаны (скоррелированы) с комплексными числами $a_1, \ldots, a_n$, по модулю равными 1, если для произвольных целых чисел $k_1, \ldots, k_n$ равенство $\chi_1^{k_1}(t) \ldots \chi_n^{k_n}(t) = 1$ для каждого $t \in G$ влечет $a_1^{k_1} \ldots a_n^{k_n} = 1$. Характеры $\chi_1, \ldots, \chi_n$ называются независимыми, если равенство $\chi_1^{k_1}(t) \ldots \chi_n^{k_n}(t) = 1$ для каждого $t \in G$ влечет $k_1 = \ldots = k_n = 0$.

Доказаны следующие теоремы:

I. Если характеры $\chi_1, \ldots, \chi_n$ группы G связаны с числами $a_1, \ldots, a_n$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $t \in G$, что $|\chi_j(t) - a_j| < \varepsilon$ для $j = 1, \ldots, n$.

II. Если характеры $\chi_1, \ldots, \chi_n$ группы G независимы, то для произвольных комплексных чисел $a_1, \ldots, a_n$, по модулю равных 1, и для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $t \in G$, что $|\chi_j(t) - a_j| < \varepsilon$ для $j = 1, \ldots, n$.

III. Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(t) \sim f(t)$ является рядом Фурье почти периодической функции f на абелевой группе G и если характеры χ_n связаны с числами $e^{i\theta_n}$, где $a_n = |a_n| e^{-i\theta_n}$ (в частности, если характеры χ_n независимы), то $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sup_{t \in G} |f(t)|$.

IV. Если ряд Фурье почти периодической функции f на абелевой группе G абсолютно сходится и $\inf |f(t)| > 0$, то ряд Фурье почти периодической функции $1/f$ также абсолютно сходится.

V. Если $f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{ir_n ut}$, где 1) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, 2) $r_n = p_n/q_n$ (p_n и q_n целые), 3) $u \neq 0$ действительное, 4) $\inf |f(t)| = 0$, то существует последовательность целых чисел s_n и точка t_0 такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i s_n/q_n} e^{ir_n ut_0} = 0.$$

Некоторые из перечисленных результатов были уже известны (например, I является другой формулировкой одной теоремы Хюитта и Цукермана (Hewitt, Zuckerman, Ann. Math., 1950, **52**, 557—567), но доказательства их являются новыми. *R. Sikorski*

См. также: 3555, 3599, 3653 К, 3680, 3688, 3698, 3701, 3708, 3734, 3770

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

3763. Об изучении теории вероятностей. Кожин Г., Военный вестник, 1953, № 1, 49—54

3764. К обоснованию теории вероятностей. II, III. Рихтер (Zur Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie. II, III. Richter Hans), Math. Ann., 1953, **125**, № 3, 223—234; № 4, 335—343 (нем.)

Первая часть статьи была опубликована в 1952 г. (Math. Ann., 1952, **125**, № 2, 129—139).

3765. Законы распределения вероятностей и стохастические процессы, представимые интегралом Лапласа — Стилтьеса. Риос (Algunas leyes de probabilidad y procesos estocasticos que se reducen a un tipo general de Laplace-Stieltjes. Ríos S.), Rev. mat. hisp.-amer., 1953, сер. 4, **13**, № 1—2, 112—119 (исп.)

Пусть функция распределения $F(x)$ представима в виде интеграла Лапласа—Стилтьеса

$$F(x) = \frac{1}{f(s)}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda s}\,dA(\lambda), \qquad (1)$$

где $f(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda s}\,dA(\lambda)$ сходится в некоторой бесконечной вертикальной полосе комплексной плоскости. Представление (1) охватывает случай непрерывных распределений с плотностью вероятностей вида $\frac{e^{\lambda s}a(\lambda)}{f(s)}$ и дискретных распределений $\frac{e^{\lambda_n s}a_n}{f(s)}$; к нему же сводятся распределения вида $\frac{z^n a_n}{g(z)}$ при помощи замены $z=e^s$. Автор обращает внимание на наличие простых формул, дающих характеристическую функцию и моменты распределения (1)

$$\varphi(t)=\frac{f(s+it)}{f(s)},\quad \alpha_\nu=\frac{f^{(\nu)}(s)}{f(s)},\quad \alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu\alpha_1+\alpha_\nu'. \qquad (2)$$

На нескольких практически важных примерах (закон Пуассона, Паскаля, χ^2-распределения и Δ_i) иллюстрируется удобство применения формул (2) и им подобных. *А. А. Бобров*

3766. Некоторые вероятностные законы и стохастические процессы, получаемые при помощи интеграла Лапласа—Стилтьеса. Р и о с (Some probability laws and stochastic processes deduced from a Laplace-Stieltjes integral. R í o s S i x t o), Rev. Acad. cienc. Madrid, 1952, **46**, 487—490 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (исп.)

Для экспоненциального семейства распределений, т. е. семейства с плотностью $f(\theta)e^{\theta x}$ относительно меры μ, характеристическая функция имеет вид $\varphi_s(t)=f(s+it)/f(s)$, так что моменты могут быть легко вычислены по f. Приводится ряд примеров экспоненциальных семейств.

Д. Блэкуелл (D. Blackwell)

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 10, 993.

Примечание редакции. Для того чтобы имела место формула $\varphi_s(t)=f(s+it)/f(s)$, необходимо, чтобы плотность имела вид $\frac{1}{f(\theta)}e^{\theta x}$ (а не $f(\theta)e^{\theta x}$, ср. реф. 3765).

3767. Закон больших чисел и усиленный закон больших чисел. Л е в и (Loi faible et loi forte des grands nombres. L é v y P a u l), Bull. sci. math., 1953, **77**, ч. 1, 9—40 (франц.)

Пусть

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots \qquad (1)$$

— последовательность независимых случайных величин,

$$S_n=X_1+X_2+\ldots+X_n,\quad M_n=\max|X_\nu|$$

Запись $U_n=o_f(V_n)$, где $\{U_n\}$ и $\{V_n\}$ — две последовательности случайных величин, означает, что при $n\to\infty$ отношение U_n/V_n стремится к нулю по вероятности, а запись $U_n=o_F(V_n)$ означает, что это отношение стремится к нулю с вероятностью единица.

Изучается связь между формулами

(1_f) $S_n-mS_n=o_f(a_n)$, (1_F) $S_n-mS_n=o_F(a_n)$,

и формулами

(2_f) $M_n=o_f(a_n)$, (2_F) $M_n=o_F(a_n)$,

где $\{a_n\}$ — монотонно возрастающая до бесконечности последовательность положительных чисел. Устанавливается, что при условии $mX_n=o(a_n)$ (mX — медиана случайной величины X) из (1_f) следует (2_f) и из (1_F) следует (2_F). Далее из множества всех последовательностей (1) автор выделяет два класса: K_1 (в него входят последовательности равномерно (uniformement) нелапласовых случайных величин) и более узкий класс K_2 (в него входят последовательности одинаково (également) нелапласовых случайных величин; соответствующие определения мы здесь опускаем), для которых справедливо следующее утверждение: если последовательность (1) принадлежит классу K_1 (соответственно K_2), то (2_f) (соответственно 2_F) влечет за собой (1_f) (соответственно 1_F); если же последовательность (1) не принадлежит K_1, то существует последовательность $\{a_n\}$ (соответственно $\{a_n'\}$) такая, что (2_f) (соответственно (2_F)) выполнено, а (1_f) (соответственно (1_F)) не имеет места.

Отметим, что теорема 7, называемая автором основной теоремой настоящей работы, может быть получена в качестве следствия из одной теоремы Лёве (Loeve M., Proc. of the Second Berkeley Symposium on math. Statistics and Probability, University of California Press, 1952, стр. 287).

Ю. В. Прохоров

3768. Рост мужского и женского населения. Г у д м а н (Population growth of the sexes. G o o d m a n L e o A.), Biometrics, 1953, **9**, № 2, 212—225 (англ.)

Изучаются некоторые простые модели роста численности мужского и женского населения. Обозначим через M среднюю численность мужского населения, а через F — среднюю численность женского населения. Тогда изучаемые модели роста населения управляются дифференциальными уравнениями

$$\frac{dM}{dt}=-aM+\Lambda(M,F),\qquad \frac{dF}{dt}=-bF+\Lambda'(M,F), \qquad (1)$$

причем функции $\Lambda(M,F)$ и $\Lambda'(M,F)$ принимаются пропорциональными F, M, $\frac{F+M}{2}$ или $\sqrt{FM}$. Приводятся решения системы (1) во всех этих случаях. Кроме того, рассмотрены некоторые простейшие вероятностные процессы типа ветвящихся, приводящие к системам уравнений вида (1).

Б. А. Севастьянов

3769. Пример ветвящегося случайного процесса с превращениями, зависящими от возраста частиц. Р и д (An age-dependent stochastic model of population growth. R e i d A. T.), Bull. Math. Biophys., 1953, **15**, № 3, 361—365 (англ.).

Разбирается пример ветвящегося случайного процесса, в котором каждая частица может либо превратиться в две частицы, либо погибнуть, причем время жизни частицы имеет показательный закон распределения. Этот пример был разобран ранее в статье А. Н. Колмогорова и Н. А. Дмитриева (Докл. АН СССР, 1947, 56, № 1, 7—10). *Б. А. Севастьянов*

3770. О применении бесконечных матриц к теории вероятностей. Романовский В. И., Докл. АН УзССР, 1953, № 9, 3—6

Указывается, что в книге Кука (Cooke Richard S., Infinite matrices and sequence spaces, London, 1950) содержатся некоторые теоремы о бесконечных матрицах, которые могут быть применены в теории вероятностей (например, в указанной книге получены выраженные в терминах матрицы $\{q_{nk}\}$ необходимые и достаточные условия для того, чтобы из $x_k \to x$ при $k \to \infty$ следовало, что

$$y_n = \sum_{k=1}^{\infty} q_{nk} x_k \to x$$

при $n \to \infty$). Из этих теорем выводится несколько простых вероятностных замечаний. Приведем одно из них: если последовательность функций распределения $F_i(x) \to F(x)$ при $i \to \infty$ и если

$$\tilde{F}_n(x) = \sum_{i=1}^{n} C_n^i p^i q^{n-i} F_i(x),$$

то $\tilde{F}_n(x) \to F(x)$.

В статье имеется значительное количество опечаток. *Р. Л. Добрушин*

3771. Понятие энтропии в теории вероятностей. Хинчин А. Я., Успехи матем. наук, 1953, 8, № 3(55), 3—20

Пусть задана конечная схема

$$A = \begin{pmatrix} A_1, & A_2, & \ldots, & A_n \\ p_1, & p_2 & \ldots, & p_n \end{pmatrix},$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную систему событий, т. е. в каждом испытании обязательно наступит одно и только одно из них, и $p_1, p_2, \ldots, p_n \left(p_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right)$ — соответственно их вероятности.

Энтропией конечной схемы автор называет величину

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_n) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log p_k$$

(при $p_k = 0$ всегда принимается $p_k \log p_k = 0$) и показывает, что она может служить мерой неопределенности заданной конечной схемы.

Например, ясно, что при равенстве нулю энтропии, т. е. когда одно из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ равно единице (а все остальные нули), результат испытания может быть предсказан с полной достоверностью и, следовательно, отсутствует всякая неопределенность в заданной конечной схеме. Во всех других случаях энтропия положительна.

Устанавливаются основные свойства энтропии:

1) При данном n энтропия конечной схемы имеет наибольшее значение, если $p_k = \frac{1}{n}$ $(k = \overline{1, n})$.

2) $H(AB) = H(A) + H_A(B)$, где под AB разумеется реализация двух конечных схем A и B.

Пользуясь этими основными свойствами энтропии, равенством

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_n, 0) = H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

и дополнительными, вполне приемлемыми предположениями, автор доказывает теорему единственности, т. е. что выбранное выражение энтропии конечной схемы является единственно возможным.

В работе рассматривается понятие энтропии для цепи Маркова и доказываются две интересные теоремы, относящиеся к ним. Дается также приложение к теории кодирования; последнее приводится как пример, иллюстрирующий практическое применение понятия энтропии. *Т. А. Сарымсаков*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

3772. Об оценке многомерного нормального интеграла. Дейвид (A note on the evaluation of the multivariate normal integral. David F. N.), Biometrika, 1953, **40**, № 3—4, 458—459 (англ.)

Рассматривается задача вычисления вероятностей $P_n = \mathbf{P}\{x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0\}$, где x_i $(i = 1,2, \ldots, n)$ — нормально распределенные коррелированные случайные величины. При $n = 2,3$ приводится выражение для P_n через коэффициенты корреляции ρ_{ij} между x_i и x_j. Из элементарных соображений для нечетных n выведена рекуррентная формула, из которой P_n определяются через предыдущие.

В случае n четных и бо́льших 2 задача определения P_n остается нерешенной. *В. С. Королюк*

3773. Закон распределения произведения размахов в выборках из прямоугольного распределения. Райдер (The distribution of the product of ranges in samples from a rectangular population. Rider Paul R.), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, **48**, № 263, 546—549 (англ.)

3774. Статистическое изучение временны́х рядов (Продолжение). Кивелёвич, Вьялар (Étude statistique des séries chronologiques. Kiveliovitch M., Vialar J.), J. scient. météorol., 1953, **5**, № 18, 75—87 (франц.)

Обобщаются результаты предшествующей статьи тех же авторов (см. РЖМат, 1954, 3411) на случай дискретных величин; в предположении равномерности распределения величин выводятся выражения для вероятностей максимумов (минимумов), фаз различных порядков и др.; строятся критерии «случайности», основанные на этих характеристиках. Некоторые из этих результатов распространяются на общий случай произвольного дискретного распределения. *Н. В. Смирнов*

3775. **Уровни значимости для асимметрических распределений. Вильсон** (Significance levels for a skew distribution. Wilson Edwin B.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, **39**, № 6, 537—546 (англ.)

Обсуждаются различные возможности определения границ с одним и тем же уровнем значимости для случайных величин с асимметрическим распределением. Изложение иллюстрируется примерами распределений, встречающихся в дисперсионном анализе. *Б. А. Севастьянов*

3776. **О вычислении ортогональных функций при анализе регрессии. Кимбалл** (Note on computation of orthogonal predictors. Kimball Bradford F.), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 2, 299—303 (англ.)

Пусть уравнение линейной регрессии величины y на величины x_i $(i = \overline{1, n})$ имеет вид $y = \sum_{i=1}^{n} h_i x_i$. Часто удобно вместо аргументов x_i вводить новые аргументы $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$, которые обладали бы свойством ортогональности: при данных N сериях измеренных значений $x_{1j}, \ldots, x_{nj}$, y_j $(j = 1, N)$ величин x_i, y должно быть

$$\sum_{j=1}^{N} \varphi_i(x_{1j}, \ldots, x_{nj})\,\varphi_k(x_{1j}, \ldots, x_{nj}) = 0 \text{ при } i \neq k.$$

При этом уравнение регрессии примет вид $y = \sum_{i=1}^{n} t_i \varphi_i$. Показывается, что ортогональные функции φ_i можно взять в виде

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^{n} v_{ik} x_k,$$

где $V = \| v_{ik} \|$ — треугольная матрица, связанная с матрицей $S = D^{-1/2} G'$, вычисляемой при решении нормальных уравнений по схеме квадратного корня, соотношением $V = (S')^{-1}$. Здесь G' — транспонированная треугольная матрица, вычисляемая при решении нормальных уравнений по схеме Гаусса—Дулитла, а D — диагональная матрица, образованная из диагональных элементов матрицы G (см. Dwyer P. S., Linear computations, John Wiley and Sons, 1951, 188). Полученные таким образом функции φ_i оказываются ортонормальными.

Коэффициенты разложения по функциям φ_i находятся по формулам

$$t_k = \sum_{i=1}^{N} y_j \varphi_k(x_{1j}, \ldots, x_{nj}).$$

а обычные коэффициенты регрессии — по формулам

$$h_k = \sum_{i=k}^{n} v_{ik} t_i.$$

Определенные этими формулами коэффициенты $h_1, \ldots, h_m$ $(m < n)$ удовлетворяют первым m нормальным уравнениям при произвольных $t_{m+1}, \ldots, t_n$. Это позволяет применять изложенный метод к задачам с несколькими группами данных, когда некоторые искомые коэффициенты регрессии должны быть одинаковыми для всех групп, а другие могут быть различными для разных групп (ср. РЖМат, 1954, 3408). *А. С. Монин*

3777. **Серийный критерий для случайных чисел и другие критерии случайности. Гуд** (The serial test for sampling numbers and other tests for randomness. Good I. J.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, **49**, № 2, 276—284 (англ.)

Рассматриваются N целочисленных случайных величин, каждая из которых принимает значения $0, 1, 2, \ldots, t-1$. Проверяется гипотеза о том, что эти величины взаимно независимы и что каждая из них принимает любое из значений $0, 1, 2, \ldots, t-1$ с вероятностью $1/t$.

Пусть $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ — совокупность наблюденных значений указанных величин. Произвольная последовательность $a_j, a_{j+1}, \ldots, a_{j+\nu-1}$ $(j = 1, 2, \ldots, N-\nu+1)$ называется ν-последовательностью, принадлежащей S. Последовательность $a_j, a_{j+1}, \ldots, a_{j+\nu-1}$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$, в которой положено $a_{N+k} = a_k$, называется ν-последовательностью, принадлежащей $\overline{S}$. Пусть $n_{\mathfrak{r}}$ $(\overline{n}_{\mathfrak{r}})$, $\mathfrak{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_\nu)$, — число ν-последовательностей, принадлежащих S $(\overline{S})$ и совпадающих с $\mathfrak{r}$. Предлагаются критерии согласия, основанные на статистиках

$$\psi_\nu^2 = \sum_{\mathfrak{r}} \left(n_{\mathfrak{r}} - \frac{N-\nu+1}{t^\nu} \right)^2 \Big/ \frac{N-\nu+1}{t^\nu}$$

и

$$\overline{\psi}_\nu^2 = \sum_{\mathfrak{r}} (\overline{n}_{\mathfrak{r}} - Nt^{-\nu})/Nt^{-\nu},$$

где $\mathfrak{r}$ пробегает все t^ν допустимых значений. В предположении, что проверяемая гипотеза имеет место, доказываются равенства

$$M\psi_\nu^2 = M\overline{\psi}_\nu^2 = t^\nu - 1$$

и при дополнительном предположении, что t — простое число, показывается существование разложения

$$\overline{\psi}_\nu^2 = \overline{\chi}_\nu^2 + 2\overline{\chi}_{\nu-1}^2 + \ldots + \nu\overline{\chi}_1^2,$$

где $\overline{\chi}_1^2, \overline{\chi}_2^2, \ldots, \overline{\chi}_\nu^2$ асимптотически независимы и предельно χ^2-распределены с числом степеней свободы $t-1$, $(t-1)^2$, $t(t-1)^2, \ldots, t^{\nu-2}(t-1)^2$, соответственно. В силу сказанного разности

$$\nabla\overline{\psi}_\nu^2 = \overline{\psi}_\nu^2 - \overline{\psi}_{\nu-1}^2, \quad \nabla^2\overline{\psi}_\nu^2 = \overline{\psi}_\nu^2 - 2\overline{\psi}_{\nu-1}^2 + \overline{\psi}_{\nu-2}^2$$

в пределе распределены по закону χ^2. *И. И. Гихман*

3778. **Описание недостоверностей в однократно-выборочных экспериментах. Клайн, Мак-Клинток** (Describing uncertainties in single-

sample experiments. Kline S. J., McClintock F. A.), Mech. Engng, 1953, 75, № 1, 3—8 (англ.)

3779. Показатель согласия двух социометрических измерений. Кац, Пауэлл (A proposed index of the conformity of one sociometric measurement to another. Katz Leo, Powell James H.), Psychometrica, 1953, 18, № 3, 249—256 (англ.)

3780 РЖ. Высшие статистические методы в биометрическом исследовании. Рао (Advanced statistical methods in biometric research. Rao C. R., XVII + 390 pp., John Wiley and Sons, N. Y., Inc.; Chapman and Hall, Ltd., L., 1952, 7.50 doll.) [**Рецензия: Ситгривс** (Sitgreaves Rosedith), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, 48, № 263, 650—651 (англ.)]

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕХНИКЕ

3781. О счетчиках со случайным мертвым временем. I. Хаммерсли (On counters with random dead time. Hammersley J. M.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, 49, ч. 4, 623—637 (англ.)

Подсчет числа клеток крови по показаниям фотоэлектронного счетчика после небольшой схематизации приводит к следующей задаче теории вероятностей. На окружности большой длины y случайно разбрасываются дуги, так что в среднем на единицу длины окружности падает λ дуг; длины разбрасываемых дуг представляют собою взаимно независимые случайные величины с законом распределения $U(t)$ и средним значением T; наибольшее возможное значение τ длины бросаемой дуги меньше, чем y; точка данной окружности называется занятой или свободной, смотря по тому, принадлежит ли она какой-либо из брошенных дуг или нет; таким образом, данная окружность распадается на альтернативно чередующиеся дуги, попеременно состоящие из занятых и свободных точек; число «свободных» дуг есть при этом случайная величина, закон распределения которой и требуется найти.

Автор показывает, что при $y \to \infty$ этот закон приближается к нормальному со средним значением $\lambda y e^{-\lambda T}$ и дисперсией

$$\lambda y e^{-\lambda T}\left\{1 - 2\int_0^{\tau}[\lambda e^{-\lambda T} - W(z)]\,dz\right\},$$

где

$$W(z) = \lambda U(z)\exp\left\{-\lambda z + \lambda\int_0^z U(t)dt\right\}.$$

Все доказательства даются весьма подробно. В конце статьи аналогичными методами кратко исследуются некоторые дополнительные вопросы, возникающие в практике фотоэлектронных счетчиков. Автор отмечает, что для практических целей наиболее важной является обратная задача оценки числа брошенных дуг по данному распределению свободных и занятых дуг на окружности. К этой задаче он предполагает вернуться в дальнейшем.

А. Я. Хинчин

3782. О вероятностях, связанных с воздушным траффиком в аэропортах. Шанталь (Sur des probabilités relatives au trafic aérien dans les aéroports. Chantal René), Travaux, 1953, 37, № 226, 397—403 (франц.)

Явления скученности, имеющие место при скоплении над аэропортом самолетов, требующих посадки, во многих отношениях подобны аналогичным явлениям при обслуживании телефонных вызовов. Поэтому математический аппарат приложений теории вероятностей к телефонии может быть применен к решению ряда вопросов, связанных с последовательной посадкой прибывающих в аэропорт самолетов. Роль «линии» играет при этом посадочная полоса, роль «длительности разговора» — длительность посадки. Точно следуя образцам, созданным в телефонии, в статье последовательно указываются законы распределения для числа прибывающих самолетов (закон Пуассона), числа занятых полос (формулы Эрланга), числа ожидающих самолетов и времени ожидания; в последнем случае рассматривается как предпосылка обслуживания в порядке очереди (Эрланг), так и допущение о случайном порядке обслуживания (Воло). Доказательства в большинстве случаев не приводятся.

Примечание референта. Формулы Эрланга для закона распределения числа занятых посадочных полос автор считает установленными при любом распределении времени посадки, ссылаясь при этом на работу Воло (Vaulot A. E., Rev. gén. de l'Électricité, 1927, 22, № 26, 1164—1171), в которой эти формулы доказываются неверно. Более серьезной является попытка доказательства этих формул у Палма (Palm, Conny 1938 г.), однако и его рассуждения не свободны от пробелов. Таким образом, формулы Эрланга могут считаться полностью обоснованными лишь при показательном распределении длительности разговора (посадки), т. е. в условиях самого Эрланга. Это замечание особенно важно как раз для траффика аэропортов, так как закон распределения длительности посадки в силу принципиальных соображений вряд ли может быть близок к показательному. *А. Я. Хинчин*

3783. Статистические методы в практике технического контроля. Коллар (Statisztikai módszerek a műszaki ellenörzés gyakorlatában. Kollár Károly), Magyar techn., 1953, 8, № 6, 356—371 (венг.)

Первая часть этой работы, в которой изложены теоретические основы статистического контроля, опубликована в № 4 того же журнала за 1953 г. Реферируемая вторая часть посвящена практике статистического контроля на производстве.

Описывается метод текущего статистического контроля — метод контрольных диаграмм по средней и размаху малых выборок в предположении нормального закона распределения генеральной совокупности. Статья содержит пример построения контрольных пределов для этого случая и, что носит менее элементарный характер, указание на то, что сигналом к вмешательству в процесс, помимо выхода точек $\bar{x}$ и R за соответствующие пределы, может служить еще образование скоплений этих точек по одну сторону от средней линии. Табличка критических значений таких скоплений приводится в статье без указаний соответствующих им ошибок первого рода. *Г. И. Егудин*

3784. Статистический контроль. Кавс (Le contrôle statistique. Cavé R.), Docum. métallurgique, 1953, № 13, 31—40 (франц.)
Популярная статья.

3785. Применение статистических методов в исследованиях. Кавс (Applications des méthodes statistiques aux recherches. Cavé R.), Docum. métallurgique, 1953, № 14, 68—74 (франц.)
Популярная статья.

3786. Конструкция поля допуска для выборочного приема на основании средних значений и размаха варьирования. Коутский, Прауза (Konstrukce akceptančního oboru pro výběrovou přejímku na základě průměru a rozpětí. Koutský Zdeněk, Prouza Ludvík), Slaboproudý obzor, 1953, **14**, № 10, 441—444 (чеш.; резюме русск., нем., англ., франц.).

Описывается простой способ конструкции поля допуска для выборочного приема, использующий в качестве характеристик арифметическое среднее значение и размах варьирования. Оперативная характеристика зависит практически только от процента брака. Предполагается нормальная основная совокупность. *Резюме авторов*

3787. Контроль качества и его применение к управлению производственным процессом в промышленных предприятиях. Лисерре (El control de calidad, su aplicacion a la direccion de fabricas y empresas. Liserre Guido O. G.), An. Soc. cient. argentina, 1953, **155**, № 5, 93—105 (исп.)

См. также: 3606, 3653 К, 3666, 3696, 3851 К

ГЕОМЕТРИЯ

3788. Мои научные связи с советскими математиками. Врынчяну (Legăturile mele ştiinţifice cu matematicienii sovietici. Vrânceanu G.), An. Rom.-Sov. Ser. mat.-fiz., 1953, **6**, № 4, 24—33 (рум.)

Приводится письмо В. Ф. Кагана с критикой некоторых утверждений автора и ответ автора, где он соглашается с этой критикой.
Б. А. Розенфельд

3789. Следуя совету Рей Пастора. Юидобро (Siguiendo una sugerencia de Rey Pastor. Huidobro José M.), Ibérica, 1953, **18**, № 268, 349—352 (исп.)

Автор, следуя совету некоего д-ра Рей Пастора, пытается доказать V постулат Евклида. Ошибка: неявно предполагается, что центр круга, катящегося по прямой, описывает прямую линию.
Б. А. Розенфельд

3790. Четыре правила Вильяма Персера. Конте (Le quattro regole di William Purser. Conte Luigi), Period. mat., 1953, **31**, сер. 4, 1—6 (итал.)

Из остроумно сделанного чертежа автор получает давно известные тригонометрические формулы; например,

$$\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{bc}{p(p-a)},$$

где a, b и c стороны треугольника, а p его полупериметр. *Н. Г. Гаспарян*

3791. О равнобедренных треугольниках с целыми сторонами и двумя целыми медианами. Эглстон (Isosceles triangles with integral sides and two integral medians. Eggleston H. G.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 321, 208 — 209 (англ.)

Автор указывает, что его доказательство (Math. Gaz., 1951, 35, № 312, 114—115) предположения Траверса о том, что не существует треугольников с целыми сторонами, медианами и площадью, является ошибочным, и дает доказательство для случая равнобедренного треугольника. *Н. М. Бескин*

3792. Спирали и овалы. Эрхарт (Spirales et ovales. Ehrhart E.), Rev. math. spéc., 1953, **64**, № 4, 85—87 (франц.)

Спираль определяется как дуга кривой, вдоль которой приращение кривизны имеет постоянный знак. Такое определение позволяет считать всякую кривую (с определенной в некоторой точке кривизной) составленной из некоторого числа спиралей.

Указываются различные свойства спиралей, например, из двух равных дуг выпуклой спирали, у которой кривизна уменьшается от A к B, дуга, более близкая к A, имеет меньшую хорду.

Овал определяется как замкнутая кривая, не содержащая дуг окружности и имеющая в каждой точке определенную кривизну. Пользуясь теоремами о спиралях, автор доказывает некоторые свойства овалов, например, что у овала не может быть менее четырех вершин. *С. И. Зетель*

3793. Построения при помощи данного отрезка и письмо Ельмслева. Фордер (On gauge constructions and a letter of Hjelmslev. Forder H. G.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 321, 203 — 205 (англ.)

Приводятся выдержки из письма Ельмслева (Hjelmslev) с доказательством теорем конгруентности в планиметрии. В связи с этим перечисляются построения, которые могут быть произведены при помощи данного отрезка (эталон длины) в евклидовой и неевклидовой геометрии. *С. И. Зетель*

3794. Физические компоненты векторов и тензоров. Труселл (The physical components of vectors and tensors. Truesdell C.), Z. angew. Math. und Mech., 1953, **33**, № 10—11, 345—356 (англ.; резюме нем., франц., русск.)

Определяются физические компоненты векторов и тензоров, отнесенных к общим криволинейным координатам; показывается, что эти компоненты представляют собой величины, обладающие есте-

ственными физическими размерностями поля и допускающие непосредственную физическую интерпретацию. Доказывается, что скалярные функции тензоров второго порядка могут быть непосредственно выражены через инварианты физических компонент. В случае ортогональных координат выводится формула для физических компонент ковариантной производной тензора произвольного порядка.

Резюме автора

3795. О микроструктуре мира. I. Элементарная длина. Вейссенхофф (On the microstructure of the world. I. The elementary length. Weyssenhoff Jan), Acta phys. polon., 1953, **11**, № 3—4, 273—297 (англ.)

Автор считает, что главной причиной затруднений современной физики в теории элементарных частиц является применение в микрофизике макрофизической точки зрения на пространство-время как на 4-мерное пространство Минковского, элементами которого являются точки-события. Автор считает эту точку зрения применимой только для явлений макрофизики, а для микрофизики предлагает новую точку зрения.

Идея автора основывается на трех известных фактах: 1) 4-мерное пространство Минковского ${}^1R_4$ допускает модель в виде многообразия ориентированных сфер 3-мерного евклидова пространства R_3, причем точки и плоскости считаются сферами соответственно нулевого и бесконечного радиуса; при этом расстояние между двумя точками ${}^1R_4$ равно касательному расстоянию между соответственными сферами R_3 (Клейн, Высшая геометрия, ГОНТИ, Л.—М., 1939, стр. 144); 2) группа конформных преобразований пространства ${}^1R_4$ (т. е. группа «преобразований Мёбиуса», переводящих точки в точки и сохраняющих углы между кривыми; эта группа переводит сферы в сферы, причем плоскости считаются частными случаями сфер; Клейн, цит. соч., стр. 54), при указанной интерпретации изоморфно изображается группой контактных преобразований пространства R_3 (т. е. группой «преобразований Ли», переводящих сферы в сферы и сохраняющих касание сфер, причем точки и плоскости считаются частными случаями сфер; Клейн, цит. соч., стр. 109); 3) уравнения Максвелла инвариантны не только относительно группы движений ${}^1R_4$ (группы преобразований Лоренца), но и относительно группы конформных преобразований этого пространства (Bateman H., Cunningham E., Proc. London. Math. Soc., 1910, 8, 223).

Автор считает, что наше пространство-время в действительности является многообразием «волновых фронтов» в R_3, каждый из которых можно рассматривать как ориентированную сферу, причем в вопросах макрофизики, где мы имеем дело с огромными массами «волновых фронтов», мы можем рассматривать их как точки-события, а все их многообразие — как пространство ${}^1R_4$, но в вопросах микрофизики, где мы имеем дело с отдельными «волновыми фронтами», следует рассматривать их непосредственно. По мнению автора, в действительности в многообразии «волновых фронтов» нет метрики и единственным соотношением между «волновыми фронтами» является их согласованное касание; в качестве группы преобразований этого многообразия, при которых инвариантны уравнения Максвелла, следует рассматривать группу контактных преобразований этого многообразия, при которых сохраняется согласованное касание «волновых фронтов». Тот факт, что последняя группа при интерпретации многообразия «волновых фронтов» в виде пространства ${}^1R_4$ изображается группой конформных преобразований ${}^1R_4$, при которых сохраняются углы между кривыми, и является, по автору, причиной того, что мы имеем право ввести в многообразие точек-событий метрические соотношения.

Б. А. Розенфельд

3796. Двумерные и четырехмерные «существа». Шрейдер (Flatheads and hyperbeings. Shrader D. F.), Techn. Engng News, 1953, **34**, № 6, 24—26 (англ.)

Общеизвестные соображения о 4-и 5-мерных кубах и т. д., содержащие, однако, ошибку — 4-мерных правильных многогранников не пять, как сказано в статье, а шесть. *Б. Н. Делоне*

3797. Против субъективизма в так называемой теории относительности. Шугайлин (Проти суб'єктивізму у так званій теорії відносності. Шугайлін О. В.), Вісник АН УРСР, 1953, № 11, 52—64 (укр.)

Автор утверждает, что теория относительности есть субъективно-идеалистическая теория и что не только ее выводы об относительности величины массы, промежутка времени и др., но и элементарное положение кинематики об относительности траектории является махистским. В противовес теории относительности он называет правильной теорию Лоренца. Он обвиняет в идеализме всех авторов (Фока, Наана, Базарова и др.), которые отстаивают в идущей дискуссии объективное значение теории относительности. Научный анализ теории относительности в статье отсутствует. Установки статьи, как и характер аргументов, не оригинальны (см., например, Максимов А. А., Вопр. философии, 1948, № 3; 1953, № 1).

Эти установки не отвечают установленным положениям физики и марксистской философии, хотя автор пытается ссылаться на классиков марксизма и многочисленных русских ученых, в частности Сеченова, Павлова, Федорова, Бехтерева и др.

А. Д. Александров

3798 К. Аналитическая геометрия. Привалов И. И., изд. 18-е, 360 стр., Гостехиздат, М., 7 р. 05 к.

Курс аналитической геометрии, написанный проф. И. И. Приваловым, скончавшимся в начале Великой Отечественной войны, предназначается в качестве учебника для высших технических учебных заведений. Как по объему, содержанию, так и по своим достоинствам это наиболее подходящий учебник для втузов, широко распространенный и с успехом используемый свыше двадцати лет. Курс написан хорошим литературным языком, ясным, отчетливым и вполне доступным для начинающих. Изложение теории сопровождается большим числом разобранных примеров; в конце каждой главы дается значительное число упражнений и задач, из которых для более сложных указаны и решения. Последнее, 18-е издание (как и предыдущее 17-е) редактировано бригадой преподавателей Московского электромеханического института под наблюдением проф. П. К. Рашевского; при этом введены главы о геометрическом истолковании уравнений, внесены допол-

нения соответственно новой программе для втузов, уточнены некоторые формулировки и выводы, учтены замечания, высказанные в вузовской секции Московского математического общества.

Однако редакция не уделила внимания некоторым недостаткам курса. Так, во введении оставлена неудачная, конечно, фраза о том, что самая существенная особенность геометрических форм — их положение; при приведении общего уравнения 1-й степени к нормальному виду не разъяснено, что умножение уравнения на постоянный множитель не изменяет геометрического значения уравнения. Сохранив для нормального уравнения традиционную форму Гессе, редакция после постановки важной задачи определения расстояния от точки до прямой предпочла ввести определение и вычисление «отклонения» точки от прямой. Наконец, в элементах векторной алгебры следовало бы указать типы векторных величин, иначе определение равенства свободных векторов является и неожиданным и непонятным. *С. С. Бюшгенс*

3799 РЕЦ. Основы наглядной геометрии. Бергхёйс (Grondslagen van de aanschouwelijke meetkunde. Berghuys S. J., 231 blz., P. Noordhoff N. V., 1952, f. 9,50) [**Рецензия: Било** (Bilo J.), Simon Stevin, 1951—1952, 29, № 4, 236 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (голл.)]

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

3800. О так называемой гомологии кристаллов. Шубников А. В., Докл. АН СССР, 1953, 88, № 3, 453—456

Совокупность тех ортогональных преобразований, при которых «материальная фигура» совмещается с собой, называется группой симметрии этой фигуры. Совокупность аффинных преобразований, при которых некоторая геометрическая фигура совмещается с собой, кристаллографы называют группой ее гомологий. На примере моноклинного двухосного кристалла автор показывает, что аффинные преобразования, совмещающие с собой кристалл как геометрическую фигуру, могут не совмещать его с собой как материальную фигуру. Этот результат, по словам автора, может быть распространен на все кристаллы, так как чисто геометрическое преобразование одной части кристалла в другую, отвечающее той или иной операции гомологии, никак не может сопровождаться изменением физических свойств обменивающихся местами частей кристалла, следовательно, никакой гомологии кристаллов не существует. *Б. Н. Делоне*

3801. Три новых метода приближенного построения квадратуры круга. Ридвиль, Дебруннер (Drei neue Näherungskonstruktionen für die Quadratur des Kreises. Riedwil H., Debrunner H.), Elem. Math., 1954, 9, № 1, 16—18 (нем.)

3802. Стереодинамические приложения одного обобщения эллипса Кульмана. Синьорини (Stereodynamische Anwendungen einer Erweiterung der Culmannschen Ellipse. Signorini A.), Arch. Math., 1953, 4, № 2, 154—162 (нем.)

Рассматривается твердое тело $\mathfrak{K}$; m—его масса, S — центр тяжести, ε — некоторая плоскость, P — ортогональная проекция S на ε, $\mathfrak{E}_P$ — соответствующий эллипсоид инерции тела $\mathfrak{K}$, s_ε — эллипс, получающийся при пересечении этого эллипсоида плоскостью ε, σ_ε — площадь s_ε и e_ε — эллипс, полученный из s_ε гомотетическим преобразованием с центром в точке P и с отношением $\pi/\sigma_\varepsilon\sqrt{m}$.

Эллипс e_ε называется центральным эллипсом плоскости ε по отношению к $\mathfrak{K}$ и является обобщением эллипса Кульмана e_p, когда $\mathfrak{K}$ сводится к некоторому куску плоскости p. Эллипс e_ε позволяет распространить на любую материальную систему хорошо известные свойства момента инерции плоской системы.

Следующее построение позволяет высказать несколько теорем, относящихся к центральному эллипсу некоторой плоскости.

Пусть a — любая направленная прямая, не проходящая через S, α — плоскость, проходящая через a и S, A — антиполюс прямой a по отношению к центральному эллипсу плоскости α (симметричная точка полюса относительно S). Если a — мгновенная ось вращения $\mathfrak{K}$, i — нормаль к α, проходящая через A, и $\mathfrak{G}_i$ — сумма импульсов частиц тела, то прямая i есть центральная ось для $\mathfrak{G}_i$.

Для регулярной прецессии симметричного волчка имеем: если p — ось прецессии, f — ось фигуры, a — мгновенная ось прецессии, $\vec{\omega}_p$ — скорость прецессии и $S_p \neq S$ является ортогональной проекцией S на p, то совокупность сил инерции симметричного волчка сводится к единственной силе $m\omega_p^2\overrightarrow{S_pS}$, приложенной не в центре тяжести, а в антиполюсе A мгновенной оси (по отношению к центральному эллипсу плоскости pf).

Эти теоремы кинематики масс обобщаются, например, на систему γ_4 с четырьмя степенями свободы, состоящую из тяжелого несимметричного волчка $\mathfrak{K}_u$, острие которого O не совпадает с центром тяжести S_u, и из некоторого тяжелого симметричного волчка $\mathfrak{K}$, свободно вращающегося вокруг своей оси OS, которая не совпадает с OS_u. Если среди ∞^8 возможных движений для γ_4 определять те, которые соответствуют равномерному вращению $\mathfrak{K}_u$ вокруг неподвижной оси $p \neq f$, то собственная скорость вращения $\mathfrak{K}$ не будет изменяться, следовательно, подчиненное движение симметричного волчка должно быть регулярной прецессией с осью p, которая должна быть вертикальной и перманентной осью (главной осью инерции хотя бы одной ее точки), т. е. принадлежать к шару Штауде (Staude) относительно несимметричного волчка. *В. С. Люкшин*

3803. Дифференциальные формулы теории оптических систем. Спаторе (Formule differenziali interessanti il calcolo dei sistemi ottici centrati. Sparatore Elio), Atti «Fondaz. Giorgio Ronchi», 1953, 8, № 3, 192—202 (итал.; резюме англ.)

Чисто алгебраическим методом (C. Morais) можно вычислить путь меридианного луча, проходящего через оптическую систему, которая называется начальной. Выводятся формулы, которые позволяют

вычислить изменение параметров конечного луча, принадлежащего системе с измененными конструктивными элементами. Знание соответствующих частных производных важно для окончательного исправления системы. *Резюме автора*

3804. Приложение тензорного исчисления к теории оболочек вращения. Кретнер (Anvendung der Tensorrechnung auf die Theorie der Rotationsschalen. Krettner J.), Österr. Ingr-Arch., 1953, **7**, № 3, 246—254 (нем.; резюме англ., франц.)

В работе разобраны некоторые вопросы геометрии и теории упругости оболочек вращения. Рассмотрены тензор искажения и тензор деформации самой оболочки и ее средней поверхности. Приведены формулы, характеризующие сдвиг, растяжение и угловое искажение в том и другом случаях. Даны условия равновесия в поле напряжений оболочки. Выкладки в работе носят диадный характер. *Ю. Н. Ястребов*

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3805. Об одной теореме Шаля. Саморуков Б. Н., Уч. зап. Ростовского-на-Дону гос. пед. ин-та, 1953, № 2, 63—69

Новое синтетическое доказательство следующей теоремы Шаля, аналога теоремы Паскаля для трехмерного пространства:

Поверхность второго порядка пересекает ребра тетраэдра в двенадцати точках; четыре тройки точек, расположенных на ребрах тетраэдра, сходящихся в общей вершине, определяют четыре плоскости. Эти плоскости пересекают грани тетраэдра, противолежащие соответствующим вершинам, по четырем прямым, принадлежащим одной системе прямолинейных образующих однополостного гиперболоида.

Теорема Шаля дополняется замечанием, что четыре прямые, представляющие собой прямые Паскаля относительно шестиугольников, расположенных в гранях тетраэдра, принадлежат второй системе прямолинейных образующих гиперболоида Шаля. *Я. П. Бланк*

3806. Конфигурация, связанная с семиугольником, описанным около конического сечения. Колобов П. Г., Уч. зап. Ростовского-на-Дону гос. пед. ин-та, 1953, № 2, 55—62

Как известно, используя 6 касательных конического сечения, можно образовать 60 описанных шестиугольников, сторонами которых будут данные 6 касательных. В каждом таком шестиугольнике прямые, соединяющие противоположные вершины, проходят через точку Брианшона, число которых, следовательно, тоже равно 60.

В работе рассматриваются 7 касательных конического сечения, используя которые можно получить $C_7^6 \cdot 60 = 420$ точек Брианшона, называемых в статье точками S. Автор довольно просто синтетически исследует расположение этих 420 точек S на плоскости и получает следующие результаты:

1) 420 точек S по 10 лежат на 252 конических сечениях, причем каждая точка S принадлежит 6 из этих кривых.

2) Существуют 630 кривых третьего порядка, на каждой из которых лежит 10 точек S.

А. А. Глаголев

3807. Построение высших и низших точек аксонометрического очерка тел вращения с криволинейными образующими. Ланюк А. В., Тр. Новосибирского инж.-строит. ин-та, 1953, **3**, 93—106

Рассматривается очерк тела вращения при параллельном проектировании последнего на плоскость проекций K.

Если плоскость K перпендикулярна направлению проектирования S, то проекция оси вращения тела является осью симметрии его очерка на плоскости K. Очерк тела, как известно, получается в пересечении его обертывающего цилиндра с плоскостью K. Высшая и низшая точки очерка лежат на проекции оси вращения данного тела, если последняя расположена вертикально.

Они в то же время являются, очевидно, проекциями точек пересечения обертывающего цилиндра с осью вращения тела.

Основываясь на этом, автор дает способы построения аксонометрических проекций высшей и низшей точек очерка тела вращения, заданного своими ортогональными проекциями на комплексном чертеже, а также непосредственно в аксонометрии. В конце работы приведены примеры указанных выше построений на чертежах технических объектов. Кроме прямоугольной аксонометрии тела вращения (крышка с круговым флянцем), рассматриваются также примеры косоугольной аксонометрии тел вращения (в частности, изображение вазы). При этом в косоугольной аксонометрии автор условно сохраняет свое определение «высшей» и «низшей» точек очерка тела вращения как точек пересечения очерка с проекцией оси вращения тела.

Н. Ф. Четверухин

3808 Д. Метод центральной аксонометрии и его применение в фотограмметрии. Рыжова В. А. Автореф. дисс. канд. техн. н., Моск. авиац. ин-т, М., 1953

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3809. Построение канонических поверхностей с делителем Севери два. Годо (Construction de surfaces canoniques de diviseur deux. Godeaux Lucien), Acad. roy. Belgique, Bull. cl. sci., 1953, сер. 5, **39**, № 8—9, 653—665 (франц.)

В работе рассматривается поверхность F, заданная в проективных координатах уравнением

$$\varphi_{2n}(x_2x_3x_4,\ x_1x_3x_4,\ x_1x_2x_4,\ x_1x_2x_3) + (x_1x_2x_3x_4)^n\psi_{2n}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = 0,$$

где φ_{2n}, ψ_{2n} — формы степени $2n$ от своих аргументов. Вычисляются жанры этой поверхности: $p_a = p_g = (n-1)(4n^2-2n+1)$, $p^{(1)} = 24n(n-1)^2 + 1$. Инволютивное преобразование T:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = y_2y_3y_4 : y_1y_3y_4 : y_1y_2y_4 : y_1y_2y_3,$$

неподвижные точки которого предполагаются не

лежащими на $\varphi_{2n}(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$, переводит F в поверхность того же типа. В частности, если $\varphi_{2n}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \psi_{2n}(x_1, x_2, x_3, x_4)$, то F переводится инволюцией T в себя, т. е. T определяет на F инволюцию, которая при $n = 2\nu$ не будет иметь неподвижных точек. Поверхность F_1, являющаяся образом этой инволюции (РЖМат, 1953, 1367) и выбранная так, чтобы ее каноническая система совпадала с ее гиперплоскостными сечениями, будет канонической поверхностью с жанрами $p_a = p_g = \nu(16\nu^2 - 12\nu + 3)$, $p^{(1)} = 24\nu(2\nu - 1)^2 + 1$ и инвариантом Севери $\sigma = 2$ (определение σ см., например, Zariski, Algebraic Surfaces, Berlin, 1953, стр. 95). Первые примеры поверхностей, для которых $\sigma > 1$, были даны автором в 1914—1915 гг. (Godeaux L., Bull. Acad. sci. Cracovie, 1914; Bull. sci. math., 1915, 39). Рассматриваются также случаи $n = 2\nu + 1$ и $\varphi_{2n} = -\psi_{2n}$. Работа содержит много мелких опечаток. *В. В. Морозов*

3810 К. Собрание математических сочинений. Том II. Шлефли (Gesammelte mathematische Abhandlungen. Band II. Schläfli Ludwig, 381 pp., Basel, Verlag Birkhäuser, 1953, 56. 15 SF)

Второй том начинается с большой статьи о результанте системы алгебраических уравнений с комментариями Буркхардта и Ван дер-Вардена (Burckhardt, van der Waerden). Затем следуют две статьи о коэффициентах при степенях x в разложении $(1 + x)(1 + 2x)\ldots\{1 + (n-1)x\}$, и короткая статья о софокусных квадриках в пространстве n измерений. Заметка «О функции трех углов....» имеет специальный интерес, ибо показывает, что Шлефли умел найти объем тетраэдра не только в сферическом, но и в гиперболическом пространстве, хотя в это время (1852 г.) он почти несомненно не был знаком с работой Лобачевского. Этот том содержит также французскую и английскую версии его «Теории многократной непрерывности» («Theorie der vielfachen Kontinuität» см. Собр. матем. соч., том 1, 1950, 167—392), разделенные двумя другими статьями, одна из которых носит скромное заглавие «Попытка определить 27 прямых на поверхности 3-го порядка и разделить эти поверхности на классы по отношению к действительности прямых на поверхности» («An attempt to determine the twenty-seven lines upon a surface of the third order, and to divide such surfaces into species in reference to the reality of the lines upon the surface»). Существование 27 таких прямых было доказано ранее Кэли и Сальмоном (Cayley, Salmon), но эта статья 1856 г., дает первое полное описание конфигурации (в знаменитых обозначениях a_i, b_j, c_{ij}). Разносторонность автора демонстрируется далее статьей об ускорении в движении планет на эллиптической орбите и другой статьей, со строгим доказательством штаудтовской теоремы относительно дробных частей бернуллиевых чисел. Наконец, имеются две статьи 1865 г., в которых Шлефли объявляет о своем открытии разложения n-мерного ортогонального преобразования на $[n/2]$ вращений.

Собрание сочинений было бы более полезно, если бы статьи располагались более систематически: или в хронологическом порядке или по их содержанию. *Кокстер (H. S. M. Coxeter)*

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 9, 833.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

3811. О соответствии поверхностей ортогональностью линейных элементов и конгруенции Рибокура. Цыганков И. В., Уч. зап. Молотовского ун-та, 1953, **8**, № 1, 15—18

Статья не содержит новых результатов (см., например, Bianchi L., Lezioni di geometria differenziale, vol. II, ч. I, 1923, 1—26). *С. Д. Россинский*

3812. Построение W-конгруенции с данной фокальной поверхностью. Цыганков И. В., Уч. зап. Молотовского ун-та, 1953, **8**, № 1, 19—23

Определяется конгруенция W по ее фокальной поверхности (S), отнесенной к произвольным параметрам. С помощью характеристической функции φ, удовлетворяющей уравнению Вейнгартена

$$\left(\frac{D''\varphi_u - D'\varphi_v}{KW}\right)_u + \left(\frac{D\varphi_v - D'\varphi_u}{KW}\right)_v = \varphi\,\frac{2FD' - ED'' - GD}{W^2},$$

определяется поверхность (ρ_1), соответствующая поверхности (S) ортогональностью линейных элементов, посредством вполне интегрируемой системы

$$\rho_{1u} = -\frac{\varphi F}{W}\,\mathbf{S}_u + \frac{\varphi E}{W}\,\mathbf{S}_v - \frac{D'\varphi_u\,\mathbf{D}\varphi - {}_v}{KW^2}\,\mathbf{n},$$

$$\rho_{1v} = -\frac{\varphi G}{W}\,\mathbf{S}_u + \frac{\varphi F}{W}\,\mathbf{S}_v - \frac{D'\varphi_v - D''\varphi_u}{KW^2}\,\mathbf{n},$$

где $W^2 = EG - F^2$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали поверхности (S), K — ее гауссова кривизна. Поверхность (ρ), соответствующая ортогональностью линейных элементов второй фокальной поверхности (S_1), определяется конечным соотношением $\rho = \mathbf{n}/\varphi$. Такое же равенство $\rho_1 = \mathbf{n}_1/\varphi_1$ связывает ρ_1, единичный вектор нормали $\mathbf{n}_1$ поверхности (S_1) и характеристическую функцию этой поверхности φ_1. Поверхность (ρ_1) определяется конечным уравнением

$$\rho_1 - \rho = \rho \times \rho_1.$$

Н. И. Алексеев

3813. Поверхность второго порядка, соприкасающаяся с данной линейчатой поверхностью. Саморуков Б. Н., Уч. зап. Ростовского-на-Дону гос. пед. ин-та, 1953, № 2, 49—54

Построение соприкасающейся поверхности второго порядка С. Ли для линейчатой поверхности средствами комплексной линейчатой геометрии Котельникова—Зейлигера. *Я. П. Бланк*

3814. Бинормальные семейства конгруенций. Рыбаков В. Н., Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 1, 13—14

Автор дает без доказательств результаты своих исследований прямолинейных конгруенций как конгруенций бинормалей некоторого семейства линий. Бинормали любой линии образуют линейчатую поверхность, на которой эта линия является линией сжатия. Такую поверхность автор называет бинормальной линейчатой поверхностью, ее линию

сжатия—бинормальной кривой, а поверхность, описанную бинормальной кривой,— бинормальной поверхностью.

Устанавливается, что всякую неизотропную конгруенцию можно разложить с произволом одной функции одного аргумента на бинормальные линейчатые поверхности. При любом разложении конгруенции на бинормальные линейчатые поверхности касательные к семейству бинормальных кривых образуют конгруенцию бинормальных касательных. Сумма анормалии данной конгруенции и анормалии конгруенции бинормальных касательных равна радиусу кручения бинормальных кривых.

Далее изучается класс конгруенций, средние поверхности которых являются бинормальными поверхностями. Такие конгруенции существуют с произволом одной функции двух аргументов.

Распределительные поверхности конгруенции секут ее среднюю поверхность по ортогональной сети. Конгруенция бинормальных касательных (средняя конгруенция) имеет своими фокальными поверхностями среднюю и среднюю огибающую поверхность данной конгруенции. Половина фокального расстояния данной конгруенции есть среднее геометрическое радиуса кручения бинормальных кривых и анормалии средней конгруенции. Средняя конгруенция огибает на средней огибающей поверхности данной конгруенции семейство кривых, бинормали которых образуют вторую конгруенцию. Для этой конгруенции средняя огибающая поверхность первой конгруенции будет средней поверхностью в двух случаях: 1) если средняя конгруенция есть конгруенция Гишара; 2) если средняя конгруенция есть конгруенция W. В первом случае распределительные поверхности первой конгруенции бинормалей секут среднюю поверхность по линиям кривизны. Во втором случае на средней поверхности и средней огибающей поверхности данной конгруенции соответствуют асимптотические линии. Для этой конгруенции произведение радиусов кручения фокальных линий ее средней конгруенции равно квадрату граничного расстояния последней.

Рассматривается класс конгруенций, допускающих симметричные пары бинормальных кривых относительно центра лучей конгруенции. Существуют с произволом одной функции двух аргументов конгруенции, несущие симметричные пары двух типов: 1) касательные к соответствующим кривым пары равно наклонены к фокальным плоскостям (вполне симметричные пары); 2) касательные к соответствующим кривым пары взаимно перпендикулярны (ортогональные пары). Дается ряд свойств этих пар. Вполне симметричные пары имеют равные радиусы кручения соответствующих кривых и анормалий конгруенций своих касательных.

Указывается существование с произволом четырех функций одного аргумента конгруенций, которые несут вполне симметричные пары и средние поверхности которых суть бинормальные поверхности. Фокальные расстояния конгруенций касательных такой пары равны между собой. Сумма анормалий конгруенций ортогональной пары и анормалии конгруенции, несущей эту пару, равна нулю. Касательные плоскости средних огибающих поверхностей конгруенций касательных ортогональной пары пересекаются по нормали средней огибающей конгруенции, несущей эту пару. *Н. И. Алексеев*

3815. О поверхностях, имеющих общий четырехсторонник Демулена. Годо (Sur les surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin. Godeaux Lucien), Acad. roy. Belgique, Bull. cl. sci., 1953, **39**, № 3, 245—254 (франц.)

Устанавливаются два аналитических условия, которым должна удовлетворять поверхность (x), для того чтобы пара поверхностей (x) и $(\bar{x})$ (Carton, Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1953, **22**, № 2, 101—111), связанная с последовательностью Лапласа периода восемь, имела общий четырехсторонник Демулена. Эти условия имеют вид:

$$(\beta_1^2 + 4a^2\alpha)(\theta^2 - 4\alpha\beta) = [\beta_1\theta - 4a\alpha(\log bh_1)_v]^2,$$

$$(\alpha_1^2 + 4b^2\beta)(\theta^2 - 4\alpha\beta) = [\alpha_1\theta - 4b\beta(\log ak_1)_u]^2,$$

где α, β, α_1, β_1 и θ являются функциями от коэффициентов уравнений

$$x_{uu} + 2bx_v + c_1x = 0,$$
$$x_{vv} + 2ax_u + c_2x = 0,$$

определяющих поверхность (x).

В частном случае, когда каждая из квадрик $\Phi_1^{(u)}$ и $\Phi_1^{(v)}$ вырождается в пару плоскостей, аналогично устанавливаются пять аналитических условий для поверхности (x) и по заданной таким образом поверхности (x) полностью определяется поверхность $(\bar{x})$.

Примененный в статье метод приводит к сложным выкладкам, что не дает возможности в общем случае по заданной поверхности (x) определить поверхность $(\bar{x})$. *Н. В. Лактанова*

3816. О поверхностях, имеющих общий четырехсторонник Демулена. Годо (Sur les surfaces ayant mêmes quadrilatères de Demoulin. Godeaux Lucien), Acad. roy. Belgique, Bull. cl. sci., 1953, **39**, № 4, 363—368 (франц.)

Продолжение статьи с тем же названием (см. реф. 3815). В пятимерном проективном пространстве S_5 рассматривается периодическая последовательность Лапласа

$$\ldots U_3,\ U_2,\ U_1,\ U,\ V,\ V_1,\ V_2,\ V_3,\ \ldots,$$

присоединенная к изображению асимптотических касательных поверхности (x) трехмерного проективного пространства S_3. Ищется поверхность $(\bar{x})$, имеющая общий четырехсторонник Демулена с поверхностью (x). Тогда записанная выше последовательность Лапласа имеет период восемь. Используется новый метод, который дает возможность не только в частном случае, как это было в первой статье, но и в общем случае по заданной поверхности (x) определить поверхность $(\bar{x})$. Именно, если z_1, z_2, z_3, z_4 — локальные координаты точки $\bar{x}$ поверхности $(\bar{x})$ относительно нормального тетраэдра Картана, связанного с точкой x поверхности (x), вершины которого помещены в точках x, m, n, y, т. е.

$$\bar{x} = z_1x + z_2m + z_3n + z_4y,$$

то

$$\rho z_1 = 4ab\alpha\beta - (2a\theta - \beta H_2)(2b\theta - \alpha K_2),$$
$$\rho z_2 = (2a\theta - \beta H_2)(\alpha_1 - KK_2) + 2b\beta(\beta_1 - HH_2),$$

$\rho z_3 = (2b\theta - \alpha K_2)(\beta_1 - HH_2) + 2a\alpha(\alpha_1 - KK_2)$,

$\rho z_4 = 2b\beta H_2 + 2a\alpha K_2 + (\beta_1 - HH_2)(\alpha_1 - KK_2) - 4ab\theta$,

где α, β, α_1, β_1, θ, H, K, H_2, K_2 являются функциями от коэффициентов уравнений:

$$x_{uu} = 2bx_v + c_1 x = 0,$$

$$x_{vv} = 2ax_u + c_2 x = 0,$$

определяющих поверхность (x). *Н. В. Лактанова*

3817. Об аналоге теоремы Гаусса-Бонне в проективно-дифференциальной геометрии. Кимпара (Sur un analogue du théorème de Gauss—Bonnet en géométrie projective différentielle. Kimpara Makoto). J. Math. Soc. Japan, 1953, 5, № 1, 70—74 (франц.)

1. Вводится проективно-инвариантная и внутренне связанная с нелинейчатой поверхностью S форма

$$\sigma = \frac{\mu}{\gamma}\,du + \frac{\lambda}{\beta}\,dv,$$

где $\lambda = -\frac{1}{2}L - \frac{1}{2}(\log\gamma)_{uu} - \frac{1}{4}(\log\gamma)_u^2$,

$\mu = -\frac{1}{2}M - \frac{1}{2}(\log\beta)_{vv} - \frac{1}{4}(\log\beta)_v^2$,

$L = \theta_{uu} - \frac{1}{2}\theta_u^2 - \beta\theta_v - \beta_v - 2\rho_{11}$,

$M = \theta_{vv} - \frac{1}{2}\theta_v^2 - \gamma\theta_u - \gamma_u - 2\rho_{22}$,

при этом, считая поверхность отнесенной к параметрам u, v асимптотических линий, автор исходит из известных фундаментальных уравнений для текущей точки x поверхности

$$x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v + \rho_{11} x,$$

$$x_{vv} = \gamma x_u + \theta_v x_v + \rho_{22} x$$

(Fubini G., Čech E., Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces, Paris, 1931). Тогда

$$\int_C \sigma = \iint_D \Omega, \qquad (1)$$

где Ω — внешний дифференциал формы σ, причем ни внутри односвязной области D, ни на ее границе C асимптотические линии не имеют точек перегиба (inflexion). Равенство (1) и представляет собой аналог теоремы Гаусса — Бонне.

2. Точка x_3 пересечения первой директрисы Вильчинского с квадрикой Ли описывает некоторую поверхность Σ. Пусть I — точка на Σ, бесконечно близкая к x_3. Тогда форму σ можно геометрически истолковать как главную часть сложного отношения $(PIDL)$, где P — данная точка поверхности S, L — точка пересечения прямой PI с квадрикой Ли, отличная от P, D — точка пересечения прямой PI с квадрикой Дарбу, соответствующей параметру $h = 2$ (Фиников С. П., Проективно-дифференциальная геометрия, М.— Л., 1937, 85). Тождественное обращение в нуль формы σ означает вырождение четырехсторонника Демулена в одну точку. В общем случае условие совпадения направления $\sigma = 0$ с одним из асимптотических направлений означает вырождение четырехсторонника Демулена в часть (portion) прямой. Если l — линия пересечения касательных плоскостей к поверхности Σ и квадрике Ли в точке x_3, а t — касательная к линии $\sigma = 0$, то условием пересечения прямых l и t является то, что S есть поверхность Фубини, а t — касательная Дарбу. Тождественное обращение в нуль формы Ω означает прохождение прямой t через вершину второго канонического пучка. *Н. И. Кованцов*

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

3818. Расслоение двупараметрических семейств прямых в многомерном проективном пространстве. Гейдельман Р. М., Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 6, 957—960

Вводится определение расслоения двупараметрических семейств прямых в n-мерном проективном пространстве, эквивалентное обычному определению расслоения (одностороннего и двухстороннего) двух конгруенций в трехмерном пространстве. В работе рассматривается лишь одностороннее расслоение. Показывается, что расслаивающее двупараметрическое семейство прямых всегда представляет собой конгруенцию (т. е. допускает разложение двумя способами на ∞^1 развертывающихся поверхностей).

Если двупараметрическое семейство, расслаиваемое непараболической конгруенцией, есть также конгруенция, то развертывающиеся поверхности обеих конгруенций соответствуют друг другу, причем фокусы лучей расслояемой конгруенции лежат в соответствующих фокальных плоскостях расслояющей конгруенции. Развертывающиеся поверхности расслояющей конгруенции в этом случае образуют сопряженную сеть на каждой из расслояющих поверхностей, что представляет собой распространение на n-мерное пространство (при одностороннем расслоении) теоремы Фубини о сопряженных парах конгруенций в P_3.

Если семейство прямых, расслаиваемое параболической конгруенцией, есть конгруенция, то эта конгруенция также параболическая, при этом развертывающиеся поверхности обеих конгруенций соответствуют друг другу, фокус луча расслаиваемой конгруенции лежит в соответствующей фокальной плоскости расслояющей конгруенции, а каждая из расслаивающих поверхностей обладает семейством асимптотических, соответствующих развертывающимся поверхностям конгруенции.

Отмечается частный случай, когда расслаивающая конгруенция вырождается в ∞^2 прямых, проходящих через одну точку. Такая конгруенция может расслаивать любую конгруенцию, причем расслояющие поверхности попрежнему несут сопряженную сеть, соответствующую развертывающимся поверхностям расслаиваемой конгруенции.

В работе использован метод внешних форм Картана, причем в каждом отдельном случае определяется широта класса рассматриваемых конгруенций. *И. И. Кованцов*

3819. О единых теориях поля. Шеррер (A propos des théories unitaires du champ. Scherrer Willy), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 11, 554—555 (франц.)

Исходя из аналогии с уравнением Дирака, автор предлагает строить единую теорию поля на базе линейной дифференциальной геометрии, в которой

метрические свойства пространства определяются при помощи n инвариантных линейных форм:

$$\psi_i = \psi_{i,k}\dot{x}_k \quad (i, k = 1, \ldots, n;\ \det|\psi_{i,k}| \neq 0).$$

В такой геометрии можно построить тензорный анализ относительно группы преобразований координат. Для построения теории поля необходимо ввести функцию действия, для которой автор по аналогии с классической теорией предлагает выражение вида

$$W = a_{ik}R^{ik,} + b_{ik}F^{i,}F^{k,}$$

Здесь $R^{ik,}$ — свернутый тензор кривизны, а $F^{i,}$ — свернутый тензор «интенсивности поля»:

$$F_{i,kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi_{i,l}}{\partial x_k} - \frac{\partial\psi_{k,l}}{\partial x_i}\right);$$

a_{ik}, b_{ik} — некоторые константы.

В заключение указывается на возможность определения в данной геометрии инвариантной квадратичной формы вида $Q = c^{ik}\psi_i\psi_k$ ($\|c^{ik}\|$—постоянная симметрическая матрица). Однако связь этого определения с предыдущими не исследуется.

Ю. А. Гольфанд

3820. О тензоре кривизны эйнштейновской обобщенной теории тяготения. Ламсон (On the curvature tensor of Einstein's generalized theory of gravitation. Lamson K. W.), Canad. J. Math., 1953, 5, № 3, 297—300 (англ.)

Эйнштейн (Einstein A., Generalized theory of gravitation, Princeton, 1950) вводит тензор $R^{\alpha}_{\beta\rho\sigma} = -R^{\alpha}_{\beta\sigma\rho}$ с 96 независимыми компонентами. Автор, используя разложение Схоутена (Schouten J. A., Der Ricci-Kalkül, Berlin, 1924) общего относительного тензора $v_{\alpha\beta\gamma\rho\sigma\tau}$, антисимметричного по α, β, γ и по ρ, σ, на пять неприводимых частей, прилагает этот метод к тензору $v_{[\alpha\beta\gamma][\rho\sigma]\tau} = \varepsilon_{\lambda\alpha\beta\gamma}R^{\lambda}_{\tau\rho\sigma}$, где ε есть антисимметричный относительный тензор с компонентами ± 1. Это приводит к разложению

$$R^{\alpha}_{\beta\rho\sigma} = [a_{\beta\sigma}\delta^{\alpha}_{\rho} - a_{\beta\rho}\delta^{\alpha}_{\sigma}] + [b_{\rho\sigma}\delta^{\alpha}_{\beta}] + [c_{\beta\sigma}\delta^{\alpha}_{\rho} - c_{\beta\rho}\delta^{\alpha}_{\sigma}] + [\varepsilon_{\lambda\beta\rho\sigma}d^{\alpha\lambda}] + [h^{\alpha}_{\beta\rho\sigma}],$$

где $a_{\rho\sigma}$, $b_{\rho\sigma}$, $c_{\rho\sigma}$, $h^{\alpha}_{\beta\rho\sigma}$ — тензоры и $d^{\rho\sigma}$ — тензорная плотность.

С. П. Фиников

3821. Релятивистская теория притяжения пульсирующей или вращающейся сферы (в применении к цефеидам). Маравалль-Касесновес (Teoria relativista de la atraccion de una esfera pulsatil o con spin.— Aplicacion a las cefeidas. Maravall Casesnoves D.), Rev. mat. hisp.-amer., 1953, сер. 4, **13**, № 3, 175—187 (исп.)

Решаются гравитационные уравнения Эйнштейна для слабого гравитационного поля пульсирующей или вращающейся сферы, примерами которых являются соответственно гравитационное поле цефеид и гравитационное поле вращающихся звезд.

Б. А. Розенфельд

3822. Теория сферически симметричного пространства-времени. VI. Инвариантные относительно группы движений и параллельные тензоры. Такено (Theory of the spherically symmetric space-times. VI. Form-invariant tensors under group of motions and parallel tensors. Takeno Hyôitirô), J. Sci. Hiroshima Univ., 1953, **A16**, № 3, 507—523 (англ.)

Работа состоит из двух частей. В первой отыскиваются тензоры, инвариантные относительно групп движений четырехмерного пространства S_0 (см. реф. 3448). Во второй определяются тензоры, ковариантно постоянные (параллельные) в S_0.

Известно, что условие инвариантности тензора $v_{i_1\ldots i_n}$ относительно преобразования с оператором $X = \xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ может быть записано в виде равенства нулю производной Ли в поле ξ^i:

$$\overset{L}{\underset{\xi}{D}}v_{i_1\ldots i_n} = 0. \tag{1}$$

Воспользовавшись ортонормированным репером h^i_{α} и введя обозначение

$$p^{\alpha}_{\beta} = h^{i}_{\beta}\overset{L}{\underset{\xi}{D}}h^{\alpha}_{i} = -p^{\beta}_{\alpha}, \tag{2}$$

автор записывает уравнение (1) для составляющих $v_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ относительно этого репера:

$$\xi^i\partial_i v_{\alpha_1\ldots\alpha_n} + p^{\rho}_{\alpha_1}v_{\rho\alpha_2\ldots\alpha_n} + \cdots + p^{\rho}_{\alpha_n}v_{\alpha_1\ldots\rho} = 0, \tag{3}$$

и группирует члены левой части следующим образом

$$\xi^i\partial_i v_{\alpha_1\ldots\alpha_n} + p^{\rho}_1F^1_{\rho} + \cdots + p^{\rho}_4F^4_{\rho} = 0, \tag{4}$$

где $F^1_1 = \cdots = F^4_4 = 0$, а $F^1_{\rho}, \ldots, F^4_{\rho}$ — суммы коэффициентов при $p^{\rho}_1, \ldots, p^{\rho}_4$. Далее, для каждого из 11 типов [A], ..., [K] в классификации пространств S_0 по группам движений (Takeno H., J. Sci. Hiroshima Univ., 1952, **A16**, № 1, 67) проводится, начиная с [A], исследование и решение уравнения (4). Результаты следующие:

Общая форма тензора n-го порядка, инвариантного относительно групп G_A или G_B, имеет вид $(g, \varepsilon)_n$, что обозначает линейную комбинацию с постоянными коэффициентами дискриминантного тензора ε_{ijkl} и произведений g_{ij}. Для группы G_G инвариантный тензор $(\lambda, g, \varepsilon)_n$, где λ_i — инвариантный вектор, определяемый с точностью до постоянного множителя, причем ε_{ijkl} может быть выражено через линейную комбинацию произведений $\varepsilon_{ijkl}\lambda^l$ и λ_i. Для групп G_D или G_E инвариантный тензор $(\lambda, g, \varepsilon; \rho)_n$, где ρ — инвариантный скаляр, λ_i определено с точностью до множителя, являющегося произвольной функцией ρ, причем коэффициенты линейной комбинации тоже произвольные функции ρ.

Тензор, инвариантный относительно группы вращений G_F, сохраняющей линейный элемент $d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2$, назван автором сферически симметричным. Его общий вид: $(\lambda, \mu, g, \varepsilon; \rho)_n$, где ρ — произвольная функция r и t, а λ_i и μ_i — единичные взаимно ортогональные сферически симметричные векторы. Таков будет тензор, инвариантный отно-

сительно G_G, или G_H, или G_K. Такой же вид имеет тензор, инвариантный относительно G_F, или G_{J_1}, или G_{J_2}, с той лишь разницей, что ρ, λ_i и μ_i здесь инвариантны относительно соответствующей группы. Так как $[I]$ состоит из двух двумерных пространств постоянной кривизны, то тензор, инвариантный относительно G_I, имеет вид $(g, \varepsilon)_n$.

Исследование ковариантно постоянных тензоров в S_0 проводится аналогичным образом с использованием выражений для коэффициентов вращения Риччи в сферически симметричной системе координат. Рассматривая S_I, т. е. S_0, у которого $B(r, t) \neq \neq \text{const}$ (см. реф. 3448, формула (1)), автор выделяет следующие типы (в специальной системе, в которой $B = r^2$):

[B] $\frac{\partial C}{\partial r} = 0$, $A = 1$; ков. пост. тензор—$(\overset{1}{\lambda}, \ldots, \overset{4}{\lambda})_n$ (g и ε входят неявно);

[L] $\frac{\partial C}{\partial r} = 0$, $A \neq 1$; ков. пост. тензор—$(\lambda, g, \varepsilon)_n$;

[M] остальные S_I; ков. пост. тензор—$(g, \varepsilon)_n$.

Пространство S_{II}, т. е. S_0, у которого $B \equiv \text{const}$ (приводимое пространство, распадающееся на два двумерных пространства (r, t) и (θ, φ)), содержит следующие типы:

[N] пространство (r, t) плоское, т. е. $K_{14}{}^{14} = 0$; ков. пост. тензор $(\lambda, \mu, g, \varepsilon)_n$;

[O] пространство (r, t) не плоское, т. е. $K_{14}{}^{14} \neq 0$; ков. пост. тензор $(\bar{g}, \bar{\bar{g}}, \bar{\varepsilon}, \bar{\bar{\varepsilon}})$.

В последнем случае тензоры в скобках являются метрическими и дискриминантными для составляющих пространств. Следует заметить, что использование общих теорем о параллельных тензорах в римановом пространстве (Широков П. А., Изв. физ.-матем. об-ва Казанского ун-та, 1925, сер. 2, 25, 86—114) непосредственно приводит к этим результатам автора.

Приведенная классификация выражена также через характеристическую систему. В заключение автор отмечает, что он может обобщить свои результаты на n-мерное S_0. *Б. Л. Лаптев*

3823. Определение количества движения и массы как вектора, инвариантного относительно новой фундаментальной группы преобразований в частной теории относительности и квантовой механике. Сибата (Definition of momentum and mass as an invariant vector of the new fundamental group of transformations in special relativity and quantum mechanics. Shibata Takashi), J. Sci. Hiroshima Univ., 1953, **A16**, № 3, 487—496 (англ.)

В предшествующих работах (J. Sci. Hiroshima Univ., 1953, **A16**, № 1, 61—66; № 2, 285—290) автор предложил вместо специальных лоренцовых преобразований частной теории относительности новую группу преобразований, связывающую две координатные системы K и K', когда K' двигается с постоянной скоростью (u^1, u^2, u^3) относительно K. Автор исходил из трех постулатов:

I. Скорость света постоянна ($= c$) для обеих систем.

II. Связь между координатами относительно K и K' однозначно определяется компонентами (u^1, u^2, u^3)

$$x'^{\alpha} = f^{\alpha}(x^1, x^2, x^3, x^4; u^1, u^2, u^3) \quad (\alpha = 1 \ldots, 4) \qquad (1)$$

III. Преобразования (1) образуют трехпараметрическую непрерывную группу преобразований с параметрами u^1, u^2, u^3.

Автор дал следующие выражения для искомых преобразований:

$$x'^i = x^j \left[\delta^i_j - \frac{d^i - u^i / c}{1 - (du)/c} d_j - \right.$$
$$\left. - d^i \left\{ \frac{u_j / c}{\sqrt{1 - (uu)/c^2}} - \frac{d_j \sqrt{1 - (uu)/c^2}}{1 - (du)/c} \right\} \right] +$$
$$+ t \left[d^i \frac{(uu)/c - (du)\ \{1 - \sqrt{1 - (uu)/c^2}\}}{(1 - (du)/c)\sqrt{1 - (uu)/c^2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{u^i}{1 - (du)/c} \right], \qquad (2)$$
$$t' = \frac{t - (ux)/c^2}{\sqrt{1 - (uu)/c^2}} (i, j = 1, 2, 3),$$

где $d_i = d^i$ константы,

$$(d_1)^2 + (d_2)^2 + (d_3)^2 = 1, \ (du) = \sum d^i u^i,$$
$$(uu) = \sum (u^i)^2.$$

В настоящей работе автор находит новый вектор количества движения-массы как вектор, зависящий только от скорости частицы и инвариантный относительно (2). Если потребовать инвариантность его и относительно группы пространственных вращений, то получится обычное для частной теории относительности определение.

Почти половину статьи занимает добавление, в котором приведены вычисления по отысканию инфинитезимальных операторов, порождающих группу преобразований, удовлетворяющую постулатам I—III. Отыскиваются операторы трехпараметрической подгруппы общей группы Лоренца без трансляций. Из вычислений видно, что автор ищет решение, не содержащее подгруппы пространственных вращений, и ограничивается вещественными значениями констант. Простейшее выражение для группы, порождаемой этими операторами, получается отбрасыванием расширения (гомотетии) и приравниванием еще одной константы нулю, что приводит к уравнениям (2). *Б. Л. Лаптев*

3824. О гравитационных волнах и движении газа в сильных, переменных гравитационных полях. Франкль Ф. И., Тр. физ.-матем. фак-та Киргизского ун-та, 1953, № 2, 47—65

Решаются гравитационные уравнения Эйнштейна для определения изменения гравитационного поля во времени при заданных начальных условиях в некоторой области. Показывается, что не только в случае слабых гравитационных полей, как это было показано Эйнштейном в 1916 г. (Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss 1916, 688), но и в случае сильных полей гравитационные волны распространяются со скоростью света. Уравнения решаются как в случае

чистого гравитационного поля, так и в случае движения газа в гравитационном поле.

Полученные результаты являются новым подтверждением того, что общая теория относительности в отличие от теории Ньютона не нуждается в космологии, распространяемой на всю Вселенную, как космология Эйнштейна или де Ситтера: вследствие конечной скорости распространения тяготения достаточно знать начальные условия в конечной области, чтобы однозначно предсказать будущее в течение некоторого промежутка времени; это весьма существенно вследствие незаконности экстраполяции частных законов природы из конечной области, где они основаны на опыте, на всю бесконечную Вселенную. *Б. А. Ровенфельд*

3825. **Общеприменимость закона сохранения энергии в редакции Планка. Бек** (Die Allgemeingültigkeit der Trägheitsgesetzes der Energie in der Planckschen Fassung. Beck F.), Z. Physik, 1953, **134**, № 2, 136—155 (нем.)

Лауэ (Laue M., Z. Physik, 1950, **128**, 387) показал, что подстановка Минковского для тензора энергии-импульса электродинамики движущихся тел единственно возможная. Этот тензор, однако, несимметричен и поэтому противоречит планковской редакции закона сохранения энергии. В реферируемой статье показывается, что нельзя судить об этом законе по симметрическим свойствам только электродинамического тензора, а необходимо рассматривать мировой тензор, возникающий из взаимодействия между полем и материей. Для незаряженного диэлектрика подсчитывается тензор материи и таким образом получается симметрический тензор для общей системы поля и находящейся под действием поверхностных сил материи. *С. П. Фиников*

3826 К. **Риманова геометрия и тензорный анализ. Рашевский П. К.**, 635 стр., Гостехиздат, М., 1953, 21 р. 70 к.

Книга является систематическим и обстоятельным руководством по римановой геометрии, тензорному исчислению и математическим основам специальной и общей теории относительности. Теория римановых пространств излагается в общем случае, когда метрика необязательно знакоопределенная. Везде тщательно освещается физическая сторона вопроса.

Книга доступна читателю, владеющему лишь втузовским курсом высшей математики. Изложение ведется на основе классического тензорного метода без использования метода внешних форм.

В главе I изложены основы тензорного анализа в трехмерном евклидовом пространстве (в прямоугольной системе координат) с приложениями к гидромеханике и теории упругости. Затем дается понятие n-мерного аффинного пространства и излагаются основы тензорной алгебры. Теория многомерных евклидовых и псевдоевклидовых (со знаконеопределенной метрикой) пространств заканчивается идеей геометрического объекта и изложением теории спиноров в четырехмерном пространстве, после чего следует специальная теория относительности с основательным изложением принципиальных вопросов механики точки и электродинамики.

В главе V рассмотрены аффинное и евклидово пространства в криволинейных координатах, а также вопрос о параллельном перенесении и о коэффициентах связности в связи с понятием дифференциально геометрического объекта. Далее идут понятия многообразия и подмногообразия, а также тензора и касательного аффинного пространства в данной точке многообразия.

В главе VII рассмотрены римановы пространства, в частности евклидово и неевклидовы многомерные пространства, а также пространства аффинной связности, геодезические линии в них, пространства аффинной связности с общими геодезическими и пространства с абсолютным параллелизмом. Затем дается аппарат абсолютного дифференцирования, теория кривых в римановом пространстве и теория геодезических. В главе IX изучается тензор кривизны пространства и теория гиперповерхности в римановом пространстве, а также специальные типы римановых пространств: пространства постоянной кривизны, проективно-евклидовы и конформно-евклидовы.

Наконец, идет общая теория относительности, а также приближенная теория тяготения, центрально-симметричное поле тяготения, эффект вращения планетных орбит, искривление световых лучей в поле тяготения и красное смещение спектральных линий. *Г. Ф. Лаптев*

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

3827. **Одна экстремальная задача из теории выпуклых кривых. Решетняк Ю. Г.**, Успехи матем. наук, 1953, **8**, № 6, 125—126

Пусть единичной окружностью в метрике Минковского на плоскости служит выпуклая центрально-симметричная кривая K и $2\pi_M$ — длина кривой K в этой метрике. Тогда $3 \leqslant \pi_M \leqslant 4$, причем указанные границы π_M точные: для правильного шестиугольника $\pi_M = 3$ и для квадрата $\pi_M = 4$.

Э. Г. Позняк

3828. **Одно характеристическое свойство шара. Гротемейер** (Eine kennzeichnende Eigenschaft der Kugel. Grotemeyer Karl-Peter), Arch. Math., 1953, **4**, № 3, 230—233 (нем.)

Усиливается полученный ранее Зюсом (Süss W., Arch. Math., 1952, **3**, 311—313) результат о том, что шар является единственной выпуклой поверхностью, для которой выполняется соотношение $H = 1/P$, где H — средняя кривизна, а P — опорное расстояние, т. е. расстояние от какой-нибудь фиксированной точки до касательных плоскостей. Именно, доказываются теоремы:

1. Если на трижды непрерывно дифференцируемой замкнутой поверхности опорное расстояние P не меняет знака и удовлетворяет непрерывно дифференцируемому соотношению

$$H = f(\mathfrak{r}^2), \text{ причем } f'(\mathfrak{r}^2) \leqslant 0$$

($\mathfrak{r}$ — вектор точки поверхности), то поверхность есть шар.

2. Если на трижды непрерывно дифференцируемой замкнутой выпуклой поверхности выполняется непрерывно дифференцируемое соотношение

$$H = F(P), \text{ причем } F'(P) \leqslant 0,$$

то поверхность есть шар.

Доказательство обеих теорем основано на интегральном соотношении (Math. Z., 1952, 55, 253—268):

$$\iint (H^2 - K)\, P do = \frac{1}{4} \iint g^{ik} H_k (\mathfrak{r}^2)_i \, do,$$

где H — средняя, K — гауссова кривизна, g^{ij} — метрический тензор.

Для доказательства теоремы 1 достаточно в первую часть этого соотношения вместо H подставить $f(\mathfrak{r}^2)$ и воспользоваться неравенствами

$$g^{ij} (\mathfrak{r}^2)_i (\mathfrak{r}^2)_j \geqslant 0, \quad f' \leqslant 0, \quad H^2 - K \geqslant 0.$$

Заметим, что в условиях обеих теорем можно не требовать, чтобы H была функцией от $\mathfrak{r}^2$ или соответственно P. Достаточно, например, для первой теоремы потребовать, чтобы для двух любых точек поверхности X и Y выполнялось условие

$$(H(X) - H(Y))(\mathfrak{r}^2(X) - \mathfrak{r}^2(Y)) \leqslant 0.$$

Аналогичное условие можно указать и для второй теоремы. *А. В. Погорелов*

3829. О жесткости поверхностей вращения. Минагава, Радо (On the infinitesimal rigidity of surfaces of revolution. Minagawa T., Rado T.), Math. Z., 1953, **59**, № 2, 151—163 (англ.)

Деформация $\boldsymbol{r}(u, v, t)$ поверхности S: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v, 0)$, не сводящаяся к движению ее как твердого тела при $t = 0$, называется бесконечно малым изгибанием, если при $t = 0$ длины кривых поверхности стационарны. Для того чтобы регулярная поверхность $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ допускала бесконечно малые изгибания, необходимо и достаточно чтобы уравнение $(d\boldsymbol{r} \cdot d\tau) = 0$ допускало нетривиальные решения, т. е. решения, не представимые в форме $\tau = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — постоянные векторы. Поверхность, не допускающая бесконечно малых изгибаний, называется жесткой.

Известна теорема Либмана: поверхность S, образованная вращением около оси z выпуклой кривой γ: $y = y(t)$, $z = z(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, если $y(t)$ и $z(t)$ — аналитические функции, удовлетворяющие условиям

$$y(t) > 0, \; z'(t) > 0 \text{ при } a < t < b,$$

$z'(a) = z'(b) = 0$, $y''z' - z''y' < 0$, является жесткой; аналитическая поверхность вращения, содержащая как часть поверхность S, тоже жесткая.

Известна теорема Рембса: среди поверхностей S_a, образованных вращением около оси z аналитических кривых

$$y = a + \rho(u), \; z = \zeta(u), \; 0 \leqslant u \leqslant U, \quad a > 0,$$

если ρ и ζ удовлетворяют условиям

$$\rho(u) \geqslant 0, \; \zeta'(u) > 0; \quad \rho''\zeta' - \rho'\zeta'' > 0 \text{ при } 0 < u < U,$$

существует бесконечное множество допускающих бесконечно малые изгибания. В работе ослабляются требования дифференцируемости в теореме Либмана. Именно, доказывается жесткость поверхности в предположении двукратной дифференцируемости поверхности по отношению к полям бесконечно малых изгибаний, имеющих непрерывные первые производные.

Относительно поверхностей Рембса (S_a) устанавливается, что все они, за исключением счетного множества, являются жесткими. Доказательство использует осевую симметрию поверхностей и основано на рассмотрении системы дифференциальных уравнений для коэффициентов Фурье разложения компонент поля бесконечно малого изгибания в тригонометрический ряд. *А. В. Погорелов*

3830. Исследование полной поверхности отрицательной кривизны. Ефимов Н. В., Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 3, 393—395

Известна теорема Гильберта о том, что не существует полной поверхности без особенностей с постоянной отрицательной кривизной. В работе обобщается этот результат Гильберта применительно к случаю поверхностей, однозначно проектирующихся на плоскость, именно: если полная поверхность $S: z = f(x, y)$ регулярна для всех значений x и y, то гауссова кривизна ее не может оставаться меньше некоторого отрицательного числа.

Доказательство основано на рассмотрении кусочно гладких кривых на поверхности S, составленных из отрезков асимптотических линий, выбираемых специальным образом. Именно, на каждом таком асимптотическом отрезке касательные к кривой не перпендикулярны оси y, кроме конца, где полукасательная перпендикулярна этой оси. Вдоль такой кривой $\partial z/\partial y$ строго монотонна. Вместе с тем оказывается, что одна из таких кривых пересекается в двух точках с кривой $\partial z/\partial y = \text{const}$. Полученное противоречие доказывает теорему.

А. В. Погорелов

См. также: 3555, 3577, 3625, 3643, 3687, 3697, 3713, 3860

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

3831. О применении метода конечных разностей к решению задачи Коши для гиперболических систем. Ладыженская О. А., Докл. АН СССР, 1953, **88**, № 4, 607—610

Статья является кратким резюме кандидатской диссертации автора (ЛГУ, март 1949 г.).

Приведены результаты исследования разностных процессов решения задачи Коши для линейных и квазилинейных систем, гиперболических в смысле И. Г. Петровского. Предполагается, что коэффициенты уравнений и начальные функции периодичны по $X = (x_1, \ldots, x_m)$ с периодом l. Автором применялись различные способы замены системы дифференциальных уравнений разностной системой. Эти замены отличаются одна от другой

разностными отношениями $\frac{\Delta u_i}{\Delta t}$, $\frac{\Delta u_i}{\Delta x_k}$, которыми заменяются частные производные $\frac{\partial u_i}{\partial t}$, $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$.

Указаны такие замены, которые приводят к сходящимся разностным процессам; даны примеры таких замен, которые могут приводить к расходящимся процессам. Рассмотрены различные классы гиперболических систем.

Например, для системы с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{m} a_{ij}^k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + b_i(t, x_1, \ldots, x_m, u_1, \ldots, u_N) \quad (i = 1, \ldots, N)$$

применялись две замены. В первой из них $\Delta x_k = \frac{l}{n}$,

$$\frac{\Delta u_i(t, X)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}[u_i(t + \Delta t, X) - u_i(t, X)],$$

$$\frac{\Delta u_i(t, X)}{\Delta x_k} =$$

$$= \frac{1}{4\Delta x}[u_i(t + \Delta t, x_1, \ldots, x_k + \Delta x, \ldots, x_m) - u_i(t + \Delta t, x_1, \ldots, x_k - \Delta x, \ldots, x_m) + u_i(t, x_1, \ldots, x_k + \Delta x, \ldots, x_m) - u_i(t, x_1, \ldots, x_k - \Delta x, \ldots x_m)].$$

Во второй

$$\frac{\Delta u_i}{\Delta t} = \frac{1}{2\Delta t}[u_i(t + \Delta t, X) - u_i(t - \Delta t, X)]$$

при $t > 0$,

$$\frac{\Delta u_i}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}[u_i(\Delta t, X) - u_i(0, X)] \text{ при } t = 0,$$

$$\frac{\Delta u_i}{\Delta x_k} = \frac{1}{2\Delta x}[u_i(t, x_1, \ldots, x_k + \Delta x, \ldots, x_m) - u_i(t, x_1, \ldots, x_k - \Delta x, \ldots x_m)].$$

Автор указывает, что при второй замене вычисление решений $u_{i\Delta}$ разностной системы проще, но $u_{i\Delta}$ сходятся к искомому решению, если $\Delta t/\Delta x$ меньше некоторого числа, определяемого коэффициентами системы. Преимущество первой более сложной замены состоит в том, что соответствующий ей разностный процесс сходится при любом соотношении Δt и Δx. *М. А. Красносельский*

3832. О численном решении дифференциального уравнения параболического типа. Бланч (On the numerical solution of parabolic partial differential equations. Blanch Gertrude), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1953, 50, № 6, 343—356 (англ.)

Изучаются численные методы решения дифференциального уравнения параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t, u), \quad 0 \leqslant x \leqslant x_a; \quad 0 \leqslant t \leqslant t_N, \tag{1}$$

содержащего нелинейный член $f(t, x, u)$. Решение $u(x, t)$ уравнения (1) должно удовлетворять данным начальным и краевым условиям. Вводится разностная сетка с шагом h по x и k по t и полагается $u(x, t) = u_{m,n}$, где $x = mh$, $t = nk$. Уравнение (1) заменяется одним из следующих двух разностных уравнений:

$$v_{m,n+1} = (1 - 2\lambda)\, v_{m,n} + \lambda(v_{m-1,n} + v_{m+1,n}) + k f_{m,n}, \tag{2}$$

$$v_{m,n+1} = (1 - {}^5/_2\lambda - 3\lambda^2)\, v_{m,n} + ({}^4/_3\lambda - 2\lambda^2)(v_{m-1,n} + v_{m+1,n}) + ({}^1/_2\lambda^2 - {}^1/_{12}\lambda)(v_{m-2,n} + v_{m+2,n}) + k\left[k f_{m,n} + {}^1/_2 k^2\left(\frac{df_{m,n}}{dt} + \frac{d^2 f_{m,n}}{dx^2}\right)\right]. \tag{3}$$

Рассматривая разности $\sigma_{m,n} = u_{m,n} - v_{m,n}$, автор устанавливает, что (2) является аппроксимационной формулой 2-го порядка, причем остаточный член $T_{2,m,n}$ имеет вид

$$T_{2,m,n} = h^2\left[\left(\frac{\lambda}{2} - \frac{1}{12}\right)\frac{\partial^4 u_{m,n}}{\partial x^4} + \theta_1\right] + O(h^3) = h^2\left[\frac{\lambda}{2}\frac{\partial^2 u_{m,n}}{\partial t^2} - \frac{1}{12}\frac{\partial^4 u_{m,n}}{\partial x^4}\right] + O(h^3), \tag{4}$$

а (3) является аппроксимационной формулой 4-го порядка, причем остаточный член $T_{4,m,n}$ имеет вид

$$T_{4,m,n} = h^4\left[\left(\frac{\lambda^2}{6} - \frac{\lambda}{12} + \frac{1}{90}\right)\frac{\partial^4 u_{m,n}}{\partial x^4} + \theta_2\right] + O(h^5) = h^4\left[\frac{\lambda^2}{6}\frac{\partial^2 u_{m,n}}{\partial t^2} + \left(\frac{1}{90} - \frac{\lambda}{12}\right)\frac{\partial^4 u_{m,n}}{\partial x^4}\right] + O(h^5). \tag{5}$$

Во всех этих формулах $\lambda = k/h^2$. Далее, из всех допустимых значений λ, для которых решение разностного уравнения сходится к решению дифференциального уравнения при $h, k \to 0$, ищется наиболее экономичное, т. е. такое, что при данной верхней грани погрешности объем вычислительной работы получается наименьшим (объем вычислительной работы полагается пропорциональным числу узлов разностной сетки). Оказывается, что наибольшее из допустимых λ не является, вообще говоря, самым экономичным. «Экономичность» λ зависит от вида функции $f(x, t, u)$ и выбора краевых условий.

Рассматриваются нелинейные члены $f(x, t, u)$ уравнения (1) двух типов.

Тип I определяется условием

$$\frac{df}{dt}+\frac{d^2f}{dx^2}=\frac{d^4f}{dx^4}=0,$$

т. е.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4},\qquad \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}=\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}.$$

Для систем типа I остаточные члены $T_{r,m,n}$ $(r\leqslant 4)$ не содержат $f(x,\ t,\ u)$ и ее производных. Для типа I функций $f(x,\ t,\ u)$ Милном, Томасом и другими было доказано, что при $\lambda={}^1/_6$ остаточный член $T_{2,m,n}$ будет порядка h^4. Среди всех λ и h, для которых точность (измеряемая величиной остаточного члена) наивысшая, а единица вычислительной работы $z={}^1/_\lambda h^3$ постоянна, значение $\lambda={}^1/_6$ является наилучшим для формулы (2). При применении к дифференциальным уравнениям (1) типа I аппроксимационной формулы 4-го порядка (3) наиболее экономичным будет то λ, при котором единица объема вычислительной работы z при заданной точности вычисления минимальна (h зависит при этом от λ). Оказывается, что λ должно быть корнем уравнения $60\lambda^2+15\lambda-8=0$, т. е. практически $\lambda={}^1/_4$.

Тип II функции $f(x,\ t,\ u)$ определяется тем условием, что производные $u(x,\ t)$ по t должны быть численно значительно меньше тех производных $u(x,\ t)$ по x (обычно удвоенных порядков), с которыми они связаны в остаточном члене $T_{r,m,n}$.

Для уравнения (1) типа II остаточные члены (4), (5) не зависят практически от λ, поэтому выгоднее брать максимальные допустимые λ. Объем вычислительной работы часто может быть уменьшен следующим методом улучшения решения, предложенным Хартри и Уомерсли (Hartree, Womersley, Proc. Roy. Soc., London, 1937, **A161**, 353—366).

Пусть $\sigma_{m,n}=u_{m,n}-v_{m,n}=h^r C_r\ (x,\ t,\ \lambda)+{}+h^{r+1}\ C_{r+1}\ (x,\ t,\ \lambda)+\ldots$, где $C_j\ (x,\ t,\ \lambda)$ не зависят от h. Пусть λ постоянно и проведены вычисления для двух шагов h_1 и $h_2=\rho h_1$ $(0<\rho<1)$ по одной и той же аппроксимационной формуле. По двум полученным приближениям (порядка h^r) $v_{m,n}(h_1)$ и $v_{m,n}(h_2)$ строится новое приближение

$$v_{m,n}(h_1,\ h_2)=\frac{v_{m,n}\ (h_2)-\rho^r\ v_{m,n}\ (h_1)}{1-\rho^r}$$

такое, что

$$u_{m,n}=v_{m,n}\ (h_1,\ h_2)-\frac{\rho^r(1-\rho)}{1-\rho^r}\ h^{r+1}\ C_{r+1}-{}$$
$$-\rho^r\ \frac{(1-\rho^2)}{1-\rho^r}\ h^{r+2}\ C_{r+2}+\ldots.$$

Выбирая подходящее ρ $(={}^1/_2,\ {}^1/_4$ и т. д.), можно иногда уменьшить таким процессом «ρ-исправления» объем вычислительной работы при заданной точности вычисления. Автор иллюстрирует свои теоретические положения численными примерами.

Л. И. Камынин

3833. Водяной колокол. Ланс, Перри (Water bells. Lance G. N., Perry R. L.), Proc. Phys. Soc., 1953, **B66**, № 12, 1069—1071 (англ.)

Физическая задача о форме водяного колокола, которую решают авторы, сводится к интегрированию дифференциального уравнения вида $R=f(r,\ z,\ dz/dr)$, где R — радиус кривизны интегральной кривой $z=z(r)$. Из геометрических соображений легко получаются формулы численного интегрирования

$$r_{n+1}=r_n+2R_n\sin\varphi\cos(\psi_n+\varphi),$$
$$z_{n+1}=z_n+2R_n\sin\varphi\sin(\psi_n+\varphi),$$
$$\psi_{n+1}=\psi_n+2\varphi,$$

где $\psi=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{dz}{dr}$, $R_n=R(r_n,\ z_n,\ z'_n)$, φ — шаг.

Построенные на основании этого решения теоретические формы поверхности колокола удовлетворительно согласуются с полученными экспериментально.

М. Л. Бродский

3834. Об интегрировании дифференциального уравнения медленно изменяющегося движения воды в открытых водотоках. Войнич Т. Г., Гидротехн. стр-во, 1953, № 3, 39—41

См. РЖМех, 1953, 647.

3835. Численное решение волнового уравнения гелия на машине СЕАК. Уэгстейн (A numerical solution of the helium wave equation with the SEAC. Wegstein J. H.), Proc. Assoc. Comput. Mach., Meeting at Toronto, Ont., 1952, September, 1953, 34—36 (англ.)

Рассматривается решение на машине СЕАК волнового уравнения гелия для двух электронов, движущихся около стационарного ядра. Уравнения записываются в упрощенной форме, по Гронвеллу (Phys. Rev., 1937, **51**, 655):

$$\nabla^2\psi+\frac{1}{z}\frac{\partial\psi}{\partial z}+\frac{1}{r}\left\{\frac{1}{\sqrt{2(r+y)}}+\frac{1}{\sqrt{2(r-y)}}-{}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4\sqrt{r-x}}+\frac{E}{4}\right\}\psi=0, \qquad (1)$$

где ∇^2 — оператор Лапласа, $r^2=x^2+y^2+z^2$ и E — собственное значение энергии. Пределы изменения переменных: $-\infty<x<\infty$; $0\leqslant y$, $0\leqslant z$; ψ конечна всюду. При $z=0$ выразить граничные условия численно для уравнения (1) трудно, поэтому полагается $w=z^{1/2}\psi$, и уравнение (1) превращается в

$$\nabla^2 w+\left(\frac{2}{4z^2}+\frac{E+4v}{4r}\right)w=0, \qquad (2)$$

где

$$v=\frac{1}{\sqrt{2(r+y)}}+\frac{1}{\sqrt{2(r-y)}}-\frac{1}{2\sqrt{r-x}}.$$

Граничные условия в этом случае будут: $w=0$ при $|x|=y=z=\infty$ и при $z=0$; кроме того, $\dfrac{\partial w}{\partial y}=0$ при $y=0$. Уравнение (2) заменяется системой разностных уравнений, которая решается

методом итераций с использованием метода ускорения сходимости. Описывается способ выбора сетки, метод ускорения сходимости, ход вычислений на машине. Поскольку решение, полученное автором, было не достаточно точным, обсуждаются пути получения большей точности. Вычисления заняли около 4 час. Указывается, что без ускорения сходимости потребовалось бы 14,5 час. для получения того же результата. *Н. П. Трифонов*

3836. Решение дифференциального уравнения разрядника при помощи математического инструмента. Вальтер, Леземан (Instrumentelle Bearbeitung der Differentialgleichung einer Funkenstrecke. Walther A., Lesemann K.-J.), Z. Physik, 1953, **135**, № 5, 658—664 (нем.)

При помощи интегрирующего устройства Отта (Walther A., Dreyer H.-J., Naturwissenschaften, 1949, **36**, 199) находятся решения дифференциального уравнения

$$2y + By^2 + \frac{K^2}{2}\left(y\,\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x^2 - 2 = 0,$$

удовлетворяющие начальному условию: $y = 0$ при $x = 1$. Уравнение решается для следующих комбинаций значений параметров:

$$B = 0; \quad 0{,}2; \quad 1; \quad 4$$
$$K = \sqrt{2}; \quad 2\sqrt{2}; \quad 5\sqrt{2}; \quad 10\sqrt{2}.$$

Решение проводится методами, обычными при использовании машины для решения дифференциальных уравнений. *Л. Е. Садовский*

3837. Решение систем линейных уравнений и обращение матриц на быстродействующих вычислительных машинах. Беджарано, Розенблатт (A solution of simultaneous linear equations and matrix inversion with high speed computing devices. Bejarano Gabriel G., Rosenblatt Bruce R.), Math. Tables and other Aids Comput., 1953, **7** № 42, 77—81 (англ.)

Предлагается модификация обычного способа исключения для решения систем линейных уравнений и обращения матриц. Пусть x_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, — элементы исходной матрицы. Продолжим эту матрицу вправо путем добавления единичной матрицы и контрольного столбца сумм, который удобно поместить между исходной и единичной матрицами. Элементы полученной прямоугольной матрицы обозначим попрежнему через x_{ij}, $i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, 2n + 1$.

Процесс последовательных исключений состоит в вычислении последовательности матриц $\| a_{ij}^{(k)} \|$, $k = 1, \ldots, n$, по формулам:

$$\left.\begin{aligned} a_{1j}^{(1)} &= \frac{x_{1j}}{x_{11}} \\ a_{1j}^{(1)} &= x_{2j} - x_{21} a_{1j} \end{aligned}\right\} j = 2, \ldots, n+1;$$

$$\left.\begin{aligned} a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)}, \quad i = 1, \ldots, k-1, \\ a_{kj}^{(k)} &= \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \\ a_{k+1,\,j}^{(k)} &= x_{k+1,\,j} - \sum_{s=1}^{k} x_{k+1,\,s}\, a_{sj}^{(k)} \end{aligned}\right\}$$
$$j = k+1, \ldots, k+n.$$

Сначала вычисляется k-я строка, элементы которой могут быть поставлены на место соответствующих элементов предыдущей матрицы. Затем вычисляются первые $k-1$ строк; здесь снова можно произвести соответствующие замещения в памяти машины. Наконец, вычисляется $k+1$-я строка, которую можно поставить вместо соответствующей строки исходной матрицы.

Если память машины имеет достаточный объем, вычисления проводятся до $k = n$, в результате получается обратная к исходной матрица. В противном случае на k-м шаге вычисления продолжаются по формулам

$$a_{ij}^{(k)} = x_{ij} - \sum_{s=1}^{k} x_{is}\, a_{sj}^{(k)}, \quad i = k+2, \ldots, n.$$

На машине с минимальной памятью все вычисления ведутся по формулам

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k)},$$
$$i = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n,$$
$$a_{kj}^{(k)} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}.$$

А. И. Жуков

3838. Оценка ошибок при приближенном решении систем линейных алгебраических уравнений. Гарса (Error bounds on approximate solutions to systems of linear algebraic equations. Garza A. de la), Math. Tables and other Aids Comput., 1953, **7**, № 42, 81—84 (англ.)

Даются оценки для приближенного решения системы $A\xi = \eta$ с неособенной матрицей A в предположении, что известно приближенное значение G матрицы A^{-1}. При выводе применяется мажорирование матрицы $A = (a_{ij})$ матрицей $\alpha(A) = (|a_{ij}|)$ (albmatrix). Одна из оценок такова:

$$|\varepsilon_i| \leqslant \frac{f_i}{1 - k} \sum_{j=1}^{n} |x_j|,$$

где x_j — компонента вектора $x = G\eta$, ε_i — компонента вектора ошибки $\xi - x$, $D = (d_{ij}) = I - GA$,

$$f_i = \max_j |d_{ij}|, \quad k = \max_j \sum_i |d_{ij}|. \quad \textit{В. И. Фаддеева}$$

3839. К вопросу об улучшении точности решения системы линейных уравнений. Лаврентьев М. М., Докл. АН СССР, 1953, 92, № 5, 885—886

Приводятся без доказательства две теоремы об оценке ошибки решения системы линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

в предположении, что известна оценка ошибки чисел b_j, а числа a_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ известны точно. Если x_i' — решение системы для случая, когда числа b_j известны точно, а x_i'' — решение для случая, когда b_j известны с ошибками, не превосходящими ε по абсолютной величине, то

$$|x_i'' - x_i'| \leqslant \frac{V\bar{e}}{|\Delta|} V\bar{n}\varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Вторая теорема касается специального случая, когда решение x_i достаточно гладко. *И. П. Мысовских*

3840. Решение линейных алгебраических систем может быть интересным. Форсайт (Solving linear algebraic equations can be interesting. Forsythe George E.), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, **59**, № 4, 299—329 (англ.)

Обзор методов решения линейных алгебраических систем. Все известные методы численного решения задачи автор рассматривает как итеративные, так как «точные» методы при практических вычислениях дают лишь приближенное значение для решения системы в силу накопления ошибок округления. Автор предлагает классифицировать методы по двум признакам: 1) быстрота сходимости, 2) простота каждого шага вычислений. Однако автор отмечает относительность этих признаков.

Статья состоит из 9 параграфов: § 1. Введение. § 2. Обзор методов; здесь даются принципы классификации. § 3. Линейные итеративные процессы. § 4. Улучшение сходимости в линейных стационарных процессах. § 5. Методы наименьших квадратов; сюда относятся различные модификации метода спуска, основанные на минимизации подходящей квадратичной функции от неизвестных. § 6. Общие методы спуска. § 7. Метод сопряженных градиентов; здесь дается краткое описание близких друг к другу методов, разработанных в самое последнее время (Stiefel E., Z. angew. Math. und Phys., 1952, **3**, 1—33; Lanczos C., J. Res. Nat. Bur. Standards, 1952, **49**, № 1, 33—53; Hestenes M. R., Stiefel E., J. Res. Nat. Bur. Standards, 1952, **49**, № 6, 409—436). В § 8 рассматриваются вопросы влияния ошибок округления и обусловленности систем. В § 9 методы оценивают с точки зрения возможности применения их при использовании различных вычислительных устройств.

Библиография 131 название; некоторые из указанных работ не опубликованы. *В. Н. Фаддеева*

3841. Графо-механическое одновременное вычисление последовательных интегралов $\int_C y^n \cdot x\,dy$, взятых по замкнутому контуру. Майард (Résolution grapho-mécanique et simultanée des intégrales successives $\int_C y^n \cdot x\,dy$ prises le long d'une courbe fermée. Myard Francis), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 20, 1947—1949 (франц.)

Описывается принципиальная кинематическая схема моделирующего устройства, состоящего из трех последовательно соединенных лобовых фрикционных интеграторов.

Угловое перемещение фрикционного диска P_1 первого интегратора пропорционально линейному перемещению его центра Ω_1 в направлении оси y. Плоскость интегрирующего колеса C_1 располагается на расстоянии x от центра диска P_1. В силу этого угловое перемещение интегрирующего колеса C_1 при обводе данного контура C с текущими координатами x, y пропорционально охватываемой контуром площади, выражаемой интегралом

$$S = \int_C x\,dy.$$

Угловое перемещение фрикционного диска P_2 второго интегратора равно угловому перемещению интегрирующего колеса C_1 первого интегратора, а расстояние плоскости интегрирующего колеса C_2 от центра Ω_2 диска P_2 постоянно равно y и, следовательно, угловое перемещение колеса C_2 при обводе по контуру пропорционально статическому моменту относительно оси Ox охватываемой им площади:

$$M_s = \int_C yx\,dy.$$

Аналогично этому угловое перемещение фрикционного диска P_3 третьего интегратора равно угловому перемещению интегрирующего колеса C_2 второго интегратора, а расстояние плоскости интегрирующего колеса C_3 от центра Ω_3 диска P_3 тоже постоянно равно y.

Поэтому угловое перемещение колеса C_3 при обводе по данному контуру C пропорционально интегралу

$$M_i = \int_C y^2 x\,dy.$$

выражающему момент инерции площади относительно Ox.

Приведена схема такого устройства.

Указано, что, взяв n интеграторов, соединенных по описанной схеме, можно одновременно получить последовательные значения интеграла от $y^n x$ при разных значениях

Автор замечает, что в другом месте он опубликует описание прибора, основанного на таком принципе. *А. Б. Штыкан*

3842. О сглаживании последовательностей точек. Куффиньяль, Ленувель (Sur le lissage des suites de points. Couffignal L., Lenouvel M.-A.), Mesures et contrôle industr., 1953, **18**, № 197, 527—532 (франц.)

Под сглаживанием авторы понимают нахождение гладкой кривой, изображающей функциональную зависимость, по экспериментальным данным. Перечислив несколько известных способов сглаживания, авторы указывают, что во всех них имеется элемент произвола (степень применяемого многочлена, число повторений процесса сглаживания и т. п.) и не существует универсального критерия удовлетворительности сглаживания. В связи с этим утверждается, что степень произвола аналитических методов сглаживания, за исключением применения ортогональных многочленов Чебышева

и гармонического анализа, того же порядка, что и при проведении сглаживающей кривой от руки. Это подтверждается также, по мнению авторов, проведенным ими опытом сглаживания от руки 14 последовательностей точек, выполненным 17 разными лицами. Отмечается, что при сглаживании от руки выявляются индивидуальные особенности сглаживающих, которых можно в основном разбить на две группы — на стремящихся получить более простую кривую и на более доверчиво следующих за ходом точек.

Наконец, указывается, что сглаживание без знания сущности рассматриваемого явления является чисто субъективным и ненаучным, и приводится пример, когда подобное формальное сглаживание приводит к бессмыслице. Отмечается также необходимость учета степени надежности каждой отдельной точки. *К. А. Семендяев*

3843. Метод приближенного решения алгебраических уравнений третьей и четвертой степени. Рюти (Eräs 3. ja 4. asteen yhtälöiden numeerinen ratkaisutapa. Ryti Henrik), Tekn. aikakauslehti, 1953, **43**, № 16, 335—336, 352 (фин.; резюме англ.)

Решение уравнения 4-й степени $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ сводится к решению уравнения 3-й степени $y[(y+p)^2 - 4r] - q^2 = 0$ и двух квадратных уравнений. Уравнение 3-й степени решается графически (ищутся точки пересечения графиков $z = y$ и $z = y - q^2/[(y+p)^2 - 4r]$), затем корни уточняются по несколько видоизмененному методу касательных Ньютона. Этот метод применим и к любым кубическим уравнениям. Приведены числовые примеры.

В приложенном к статье резюме на английском языке метод касательных Ньютона назван интерполяцией по Ньютону. *М. Л. Бродский*

3844. Решение квадратного уравнения при помощи счетной линейки. Сатов (Die Lösung einer quadratischen Gleichung mit Hilfe des Rechenschiebers. Satow H.), Energie und Technik, 1953, **5**, № 11, 252—253 (нем.)

Описание способа решения квадратного уравнения, который рассмотрен в некоторых руководствах по счетной линейке, например в книге Д. Ю. Панова «Счетная линейка» (Гостехиздат, М., 1953, 99—110). *В. М. Брадис*

3845. Номограмма для быстрого нахождения сечения проводов в электрических установках 1-й категории. Саватье (Abaques pour le choix rapide de la section des conducteurs dans les installations électriques de 1-re catégorie. Savatier J.), Électricité, 1953, **37**, № 191, 39—43 (франц.)

Приводятся 2 номограммы, имеющие форму квадрата, для пользования которыми необходимо иметь крестообразный транспарант (называемый автором андреевским крестом). Первая номограмма построена для случая медных проводов, а вторая — для алюминиевых.

Каждая номограмма представляет 2 формулы:

$$I\sqrt{3} = \frac{P \cdot 10^3}{U \cos\varphi}, \quad \Delta U = \frac{\rho L \cdot 10^2}{s} I\sqrt{3},$$

где I — сила тока в амперах, P — передаваемая мощность в киловаттах, L — длина линии в метрах, U — междуфазовое напряжение в вольтах, s — сечение провода в квадратных миллиметрах, $\cos\varphi$ — коэффициент мощности, ΔU — падение напряжения в вольтах.

Каждая из шкал квадрата, за исключением левой, несет на себе 2 переменные. Для шкал P, s и U, L пределы взяты одинаковыми; этого можно было бы избежать, вводя двойную градуировку, как для шкалы, несущей ΔU и $\cos\varphi$.

В конце работы приводится схема сложной, разветвленной сети, которая рассчитывается при помощи номограммы.

Методика построения номограммы и ее расчет не приведены. *И. Н. Денисюк*

3846. Расчет воздуха для теплоцентрали. Мерфи (How to figure air for plant heating. Murphy Louis J.), Mill and Factory, 1953, **53**, № 3, 78 (англ.)

Предлагается номограмма из выравненных точек для расчета количества горячего воздуха, необходимого для поддержания постоянной температуры в охлаждающемся помещении. Номограмма реализует формулу $(T - T_1)Q = M$. *Г. Е. Джемс-Леви*

3847. К технологической характеристике сит бумажных машин. Брехт, Росенлев (Beitrag zur technologischen Kennzeichnung von Papiermaschinensieben. Brecht Walter, Rosenlew Nils), Das Papier, 1953, **7**, № 19—20, 381—388 (нем.)

Наряду с другим материалом приводится сетчатая номограмма для определения свободной поверхности сита для бумажной машины.

Номограмма построена для формулы $F_0 = 100 - 10(ad + be) + adbe$. *Г. Е. Джемс-Леви*

3848. Замечания об одном справочнике. Пародй (Bemerkungen am Rande eines Taschenbuches. Parodi A.), Sanit. Technik, 1953, **18**, № 6, 161—166 (нем.)

В статье содержится ряд замечаний и пожеланий по поводу нового издания книги «Справочник по отоплению и вентиляции» (Reckнagel-Sprenger, Taschenbuch für Heizung und Lüftung, Verlag R. Oldenbourg, München, 1952), касающихся в основном номограмм. Отмечается, что вместо целого ряда сетчатых номограмм, помещенных в справочнике, лучше было бы построить номограммы из выравненных точек. В качестве примера приводится номограмма из выравненных точек для формулы средней логарифмической разности температур

$$t = \frac{t_1 - t_2}{\ln \frac{t_1}{t_2}}, \qquad (1)$$

которая в справочнике представлена сетчатой номограммой. Номограмма формулы (1) построена по видимому, приближенным путем. Переменные t_1, t_2 и t изменяются в пределах от 10° до 1300°. Номограмма построена Батке (Batke) и взята из книги Гумца (Gumz W., Handbuch der Brennstoff- und Feuerungstechnik, Verlag Springer, 1953).

Приводится ряд других примеров. *Г. С. Хованский*

3849. Примеры решения технико-математических задач при помощи графических построений. Радельт (Konstruktionsbeispiele zur graphischen Darstellung technisch-mathematischer Probleme. Radelt Heinz), Nachrichtentechnik, 1953, **3**, № 11, 522—524 (нем.)

Описываются известные приемы графических вычислений, встречающиеся в технических расчетах; приближенные способы построения синусоиды и кривой $z(t) = C(1 - e^{-t/T})$ с точностью порядка 5%; способ Ранкина приближенного спрямления дуги окружности $<60°$, с точностью порядка 0,1%.

А. Б. Штыкан

3850. Специальная координатная бумага для инженеров. Выбор шкал для частных проблем. Часть 1. Грин (Special graphs for engineers. The choice of scales for particular problems. Part 1. Green H. E.), Electr. Times, 1953, **124**, № 3230, 617—621 (англ.)

Краткие указания о некоторых сортах координатной бумаги и о тех технических вопросах, в которых эти сорта используются, со ссылками на 9 источников (статьи в электротехнических журналах от 1914 до 1952 г.). Кроме обычной клетчатой бумаги с равномерными делениями по обеим осям (с «линейными шкалами»), рассмотрены разные виды логарифмической бумаги, бумаги с квадратичными шкалами, бумаги со шкалой функции $\ln(0{,}5h + \sqrt{0{,}2\partial h^2 + 1})$, бумаги для расчетов, связанных с теорией вероятностей, и др.

В. М. Брадис

3851 К. Методы обработки экспериментальных данных. Уэртинг А., Гефнер Дж. (в подлиннике Уорсинг А., Геффнер Дж.), изд. 2-е, 346 стр., Изд-во иностр. лит-ры, М., 1953, 17 р. 75 к.

В первых трех главах книги рассматривается вопрос о представлении результатов наблюдений в табличном, графическом и аналитическом виде. Здесь описываются различные виды таблиц, графиков и диаграмм, упрощенные методы получения эмпирических формул, а также простейшие приемы интерполяции. В четвертой главе даются методы численного и графического интегрирования и дифференцирования и описываются некоторые приборы, применяемые для этой цели (полярный и фотоэлектрический планиметры, зеркальный тангенсометр).

Пятая глава посвящена гармоническому анализу. Кроме элементарных теоретических сведений, включающих и понятие об интеграле Фурье, здесь описано несколько типов гармонических анализаторов и дается пример нахождения коэффициентов Фурье при помощи численного интегрирования. Специальные схемы для гармонического анализа не приводятся.

В главах VI—X рассматриваются статистические методы обработки данных. После введения нормального распределения даются основные приемы определения характеристик рассеяния по имеющейся выборке и выяснения возможности применения нормального закона, а также вопрос о критериях согласия в более общем случае. Кроме критерия χ^2, здесь в добавлении редактора дан критерий А. Н. Колмогорова. Далее рассматриваются неравноточные измерения, в частности, вопрос о совместности средних значений различных серий наблюдений. В главе IX рассмотрен вопрос о точности посредственных измерений и в главе X — об уравновешивании условных измерений.

В главе XI описано применение метода наименьших квадратов для получения эмпирических формул. Для случая многочлена и равноотстоящих абсцисс указана возможность применения таблиц.

В главе XII рассмотрены основные понятия теории корреляции. Кроме методов получения коэффициента корреляции и линий регрессии, затронут вопрос о надежности вычисленных коэффициентов корреляции и введена функция Фишера. В последней краткой главе даны элементы периодограмм-анализа.

Изложение в основном носит описательно-рецептурный характер. В конце каждой главы даются краткие выводы и задачи, в большинстве взятые из научной литературы по физике и химии.

В приложении даны таблицы плотности нормального распределения и интеграла вероятности, критерия Шовене и критерия χ^2, функции Фишера $[r = r(z)]$, натуральных и десятичных логарифмов, квадратных корней и тригонометрических функций, а также таблицы для вычисления коэффициентов кубического многочлена по методу наименьших квадратов. За исключением последних, таблицы в основном четырехзначные.

Список литературы, составленный редактором, содержит 63 названия. *К. А. Семендяев*

ТАБЛИЦЫ

3852. Составление таблиц неполных функций Ферми — Дирака. Келлер, Фенуик (Tabulation of the incomplete Fermi — Dirac functions. Keller Geoffrey, Fenwick Mary), Astrophys. J., 1953, **117**, № 3, 437—446 (англ.)

Рассматривается неполный интеграл Ферми — Дирака

$$F(\eta, u) = \int_0^u \frac{x^{1/2}dx}{e^{x-\eta}+1},$$

используемый для определения плотности свободных электронов. В таблице 1 приведены значения этой функции с тремя знаками после запятой для $u = 0{,}0\ (0{,}2)\ 1{,}0;\ 1{,}0\ (0{,}1)\ 20{,}0$ и $\eta = -2.0\ (0{,}5)\ 10{,}0$. Значения функции при $u > 20{,}0$ совпадают со значениями при $u = \infty$.

Для $\eta < -2$ функция представима рядом по степеням e^{η}, члены которого содержат вероятностный интеграл, а для $\eta > 10$ — рядом по обратным степеням η, члены которого содержат функции $G_n(v)$, определяемые равенствами:

$$G_0(v) = \int_v^\infty \frac{dy}{e^y+1} = \log(e^{-v}+1),$$

$$G_1(v) = \frac{1}{2}\int_0^v \frac{ydy}{e^y+1},$$

$$G_2(v) = \frac{1}{8}\int_0^v \frac{y^2dy}{e^y+1},\quad G_3(v) = \frac{1}{16}\int_0^v \frac{y^3dy}{e^y+1}.$$

Значения этих интегралов приведены в таблице 2 для $v = 0{,}0\ (0{,}1)\ 10{,}0$. Значение функции $G_0(v)$

приведено с 4 знаками после запятой, а $G_1(v)$, $G_2(v)$, $G_3(v)$ — с 3 знаками после запятой. Максимальная ошибка таблиц не превосходит двух единиц последнего знака. *К. Е. Чернин*

3853. Составление таблиц одного интеграла, встречающегося в теории явлений взаимодействия. Тиксон (Tabulation of an integral arising in the theory of cooperative phenomena. Tikson Michael), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1953, 50, № 3, 177—178 (англ.)

Таблица интегралов

$$I(b) = \frac{1}{\pi^3}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \frac{dx\,dy\,dz}{3b - (\cos x + \cos y + \cos z)}$$

для $b^{-1} = \mu = 0{,}01(0{,}01)1$ с 5 знаками после запятой. Дано описание способа вычисления; приведена использованная в ходе вычислений вспомогательная таблица коэффициентов c_{2m} разложения

$$[I_0(x)]^3 = \sum_0^{\infty} c_{2m}x^{2m}$$

для $2m = 0(2)40$ с числом значащих цифр, достигающим семнадцати. Здесь

$$I_0(x) = J_0(ix) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{(k!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

М. К. Гавурин

3854. Основная таблица для получения гиперболических и обратных гиперболических функций с большим числом знаков. Солзер (Radix table for obtaining hyperbolic and inverse hyperbolic functions to many places. Salzer Herbert E.), J. Math. and Phys., 1953, **32**, № 2—3, 197—202 (англ.)

Приведенные в статье таблицы позволяют вычислить значение гиперболического тангенса и обратного гиперболического тангенса и, следовательно, все другие гиперболические и обратные гиперболические функции с 18 знаками после запятой.

Метод нахождения функций использует два алгоритма, которые следуют из формулы для тангенса суммы двух углов, основную таблицу $\mathrm{Arth}\,(m\,10^{-n})$ и дополнительные таблицы $\mathrm{th}\,A$, $\frac{1}{2}\ln I$ и $\frac{1}{2}\ln J$. Основная таблица $\mathrm{Arth}\,(m\,10^{-n})$ приведена для $m = 1(1)9$, $n = 1(1)6$; дополнительные таблицы даются для

$$\mathrm{th}\,A,\ A = 1(1)24;\ \frac{1}{2}\ln I,\ I = 2(1)10;$$

$$\frac{1}{2}\ln J,\ J = 1{,}2(0{,}2)1{,}8.$$

Все таблицы даны с 20 знаками после запятой.

При нахождении значений $\mathrm{th}\,x$ и $\mathrm{Arth}\,t$ требуется производить умножение и деление многозначных чисел (деление 19-значного числа на 19-значное). Если значение функции нужно определить менее точно, то соответственно уменьшается число знаков при умножении и делении.

К. Е. Чернин

3855 К. Таблицы вычисления процентов, 384 стр., Госстатиздат, М., 1953, 8 р. 55 к.

3856 РЕЦ. Таблицы арктангенсов (Table of arctan X, 2nd ed., XIII + 171 pp., National Bureau of Standards, Washington, 1953, 1.75 doll.) [**Рецензия**: **Уишарт** (Wishart J.), J. Roy. Statist. Soc., 1953, **A 116**, ч. III, 332 (англ.)]

См. также: 3675, 3719, 3722, 3724, 3743, 3752, 3865, 3876

АЛГЕБРА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

3857. Вторая основная теорема теории электрических цепей. Солцер (The second fundamental theorem of electrical networks. Saltzer Charles), Quart. Appl. Math., 1953, **11**, № 1, 119—123 (англ.)

Доказывается теорема:

Для любой связанной цепи существует матрица $A = (A_{pq})$, где $A_{pq} = 1, -1$ или 0 в зависимости от того, является ли узел соответственно концом или началом p-й ветви или же он не принадлежит этой ветви, причем: 1) для произвольных значений основных напряжений напряжения, вычисляемые по уравнению

$$E = AV, \qquad (1)$$

удовлетворяют второму уравнению Кирхгофа на всех контурах цепи; 2) для каждой совокупности напряжений E_p ($p = 1,2,\ldots,B$; B — число всех ветвей в цепи), которые на каждом контуре цепи удовлетворяют второму закону Кирхгофа, существует совокупность основных напряжений V_q, удовлетворяющих уравнению (1).

Основными напряжениями здесь называются потенциалы узлов J_q ($q = 2, 3, \ldots, N$) относительно некоторого произвольного угла J_1, предполагаемого заземленным. Эта теорема является двойственным аналогом первой основной теоремы, доказанной ранее (Ingram W. H., Cramlet C. M., J. Math. and Phys., 1944, **23**, 134—155).

Автор, используя эту теорему, выводит уравнение Крона и доказывает существование и единственность решения основного уравнения матричной теории электрических цепей.

В заключение рассматривается связь между теоремами метода узловых напряжений и метода контурных токов. *В. И. Шестаков*

3858. Анализ электрической цепи при помощи производящего многочлена матрицы. Кёрс (Network analysis with the aid of the matrix generating polynomial. Kurss Herbert), Convent. Res. Inst. Radio Engrs, 1953, 5, 39—43 (англ.)

Пусть $A = [a_{ij}]$ — произвольная квадратная матрица, $\Omega = [\lambda_{ij}]$ — вспомогательная квадратная

матрица того же порядка. Производящим многочленом матрицы A относительно Ω называется определитель $|A+\Omega|$, рассматриваемый как многочлен относительно переменных λ_{ij}.

Указана электрическая интерпретация уравнения вида $|Z+\Omega|=0$ на модели электрической цепи, где Z — матрица кажущихся (комплексных) сопротивлений цепи. Пользуясь этой интерпретацией и производящими многочленами матриц, автор рассматривает некоторые известные свойства матриц и соответствующие свойства электрических цепей. В частности, автор дает новый вывод формулы Кемпбелла, полученной ранее при решении некоторой задачи теории электрических цепей и относящейся по существу к теории линейных преобразований.

Изложение в работе не точно, а иногда ошибочно; так, например, в начале главы V пропущено существенное замечание, что x_3 исключается при условии $y_3=0$. Равенство в начале главы VI ошибочно, однако следствие из этого равенства правильно. Имеются опечатки. *Н. А. Бразма*

3859. **Параметры четырехполюсных цепей. Фергусон** (The parameters of a four-terminal network. Ferguson A. E.), Austral. J. Appl. Sci., 1953, **4**, № 1, 18—27 (англ.)

Производится сравнение двух основных методов анализа четырехполюсных цепей — обычного метода теории передачи по длинным линиям и матричного метода анализа четырехполюсников.

Из уравнений Кирхгофа для контурных токов выводятся обычные уравнения четырехполюсников в матричной форме и приводится несколько примеров применения матричного метода для вычисления параметров четырехполюсных схем. Далее производится вычисление выражений волновых сопротивлений и постоянной распространения через параметры четырехполюсника и, наоборот, выражений элементов матрицы четырехполюсника через волновые сопротивления и постоянную распространения. Новых результатов статья не содержит. *В. И. Шестаков*

3860. **Матричный и тензорный анализ электрических цепей. Сопер** (Matrix and tensor analysis of electrical networks. Soper P. F.), Brit. Electr. and Allied Manufact. Assoc. J., 1953, **60**, № 195, 286—292 (англ.)

Элементарная статья, предназначенная для первоначального ознакомления с матричными и тензорными методами анализа электрических цепей. На простых примерах показывается применение определителей и матриц для решения алгебраических линейных уравнений. Вводится понятие тензора и в качестве примера применения матричных и тензорных методов проводится для мостика Уинстона вычисление матрицы преобразования контурных токов в токи ветвей, а также матрицы преобразования падений напряжений на ветвях в контурные э. д. с. На примере этой же схемы показано, как действительная схема может быть разложена на примитивные контуры. Приведены тензорные формы закона Ома для токов и э. д. с. ветвей, а также для контурных токов и э. д. с. *В. И. Шестаков*

3861. **Матрица передачи четырехполюсника. Дирдс, Хинтон** (The fourpole transmission matrix. Deards S. R., Hinton W. R.), Electronic Engng, 1953, **25**, № 306, 351 (англ.)

Показывается, что A-матрица, выведенная в статье Хинтона (Hinton W. R., Electronic Engng, 1953, **25**, № 302, 151—152), легко может быть получена посредством элементарных операций матричной теории четырехполюсников.

В. И. Шестаков

3862. **Замечание о повторных схемах и их приложение к дифференцирующим цепям. Армстронг** (Note on the iterated network and its application to differentiators. Armstrong H. L.), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 5, 667 (англ.)

Автор дает новое доказательство уже известной формулы (Pease M. C., Proc. Inst. Radio Engrs, 1952, **40**, 709). Пусть $A=\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}\\a_{21}a_{22}\end{pmatrix}$ — матрица второго порядка, $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=1$, $x=\frac{a_{11}+a_{22}}{2}$. Тогда $A^n=$

$$=AU_n(x)-EU_{n-1}(x),\quad \text{где}$$

$$U_n(x)=\frac{\sin n \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$$

— многочлен Чебышева второго рода.

А. А. Абрамов

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

3863. **Простая электронная вычислительная машина. Киц** (Una semplice calcolatrice elettronica. Kitz Norbert), Tecn. ital., 1953, **8**, № 2, 85—92 (итал.; резюме англ.)

Обсуждается вопрос целесообразности постройки простых электронных вычислительных машин, доступных для небольших лабораторий и университетов.

Излагаются соображения для выбора блок-схемы и основных технических данных простой вычислительной машины под названием СЕК (SEC — Simple Electronic Computer), спроектированной в Лондонском университете. Подробно описана блок-схема и принцип действия машины СЕК, которая содержит менее 400 ламп. Это последовательная машина, оперирующая с двадцатиразрядными двоичными числами. Система программирования СЕК двухадресная. Код команды разбивается на три части: 5 разрядов для кода операций и 2 группы по 8 разрядов, которые служат для выбора числа и следующей команды из запоминающего устройства.

Запоминающее устройство на магнитном барабане вмещает 256 двоичных чисел по 20 разрядов. Барабан представляет собой латунный цилиндр, диаметром 5 *см* и длиной 2 *см*, вращающийся со ско-

ростью 3000 об/мин. Цилиндр покрыт магнитным материалом, кроме небольшой части на конце цилиндра. На этой части цилиндра сделано по образующим 256 насечек, заполненных магнитным материалом, которые служат для получения синхронизующих импульсов. Система считывания и записи чисел последовательная. На окружности барабана помещается 8 чисел, причем вдоль образующей установлено 32 головки, служащие для записи и считывания.

Магнитная головка изготовлена из пластинки «мю-металла» толщиной 0,37 *мм*, на которой намотано 3 витка медной эмалированной проволоки диаметром 0,19 *мм*.

Ток записи в головке до 10 *а*. Приведена фотография магнитного барабана. *Н. Я. Матюхин*

3864. О значении современных больших вычислительных машин с программным управлением для исследования мирового пространства. Тюринг (Über die Bedeutung der modernen programmgesteuerten Grossrechenmaschinen für die Weltraumforschung. Thüring Bruno), Weltraumfahrt, 1953, **4**, № 4, 110—115 (нем.)

Указывается, что ряд математических и механических проблем, связанных с исследованием мирового пространства, может быть решен лишь при помощи быстродействующих автоматических вычислительных машин. В качестве основных типов указываются электронные и релейные цифровые машины; кратко поясняются основные понятия, связанные с конструкцией и работой современных цифровых вычислительных машин. Более подробные сведения приводятся о немецкой релейной цифровой машине Z5 (ЦУЗЕ-5, ZUSE 5), которую автор, наряду со шведской релейной машиной БАРК (BARK), считает наиболее быстрой современной релейной машиной.

Машина Z5 установлена на оптическом заводе Лейтца в Вецларе (РЖМат, 1953, 1433). Эта машина (см. фото) работает по двоичной системе с учетом порядков, оперируя с числами, имеющими 8 десятичных разрядов и лежащими в пределах от 10^{20} до 10^{-20}. Машина имеет 2400 реле, 450 из которых используются во внутреннем запоминающем устройстве на 12 чисел. Внешняя память на бумажной перфорированной ленте, на ленте же перфорируются

команды. Скорость сложения и вычитания 0,12 сек., умножения 0,48 сек., деления и извлечения корня 0,88 сек. Автор считает, что машина Z5 при коротких вычислениях работает примерно в 20 раз быстрее автоматического арифмометра, а при длинных — в 50—60 раз быстрее. Указывается, что после постройки машины в Нейкирхене, в процессе наладки, на ней были вычислены возможные траектории межпланетного корабля в поле тяготения Земли и Луны. Эти траектории являются частными решениями ограниченной проблемы трех тел в форме Якоби. Методом Рунге-Кутта было вычислено 7 плоских траекторий, на что потребовалось 10 час. машинного времени. Указывается, что намечается серийный выпуск машин Z5; предполагаемая стоимость — 300 тыс. западногерманских марок. *Д. Ю. Панов*

3865. Решение дифференциальных уравнений на электронной цифровой вычислительной машине. Градуэлл (The solution of differential equations on an electronic digital computer. Gradwell C. F.), Engineer, 1953, **196**, № 5085, 36—39 (англ.)

Излагается опыт решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений на быстродействующей электронной вычислительной машине Манчестерского университета. Дается описание машины (одноадресная, 3 арифметические операции выполняются над числами, содержащими 40 двоичных разрядов). Из различных методов численного интегрирования рекомендуется метод Рунге — Кутта (с точностью до h^4 включительно), так как он не требует подготовительных вычислений для начала процесса интегрирования. Подробно описывается процесс решения на указанной машине одной конкретной системы уравнений, связанной с формой воздухонепроницаемых матерчатых оболочек; приводится блок-схема программы и время работы машины. Кратко затронуты другие моменты работы (ввод, вывод, контроль и др.). *В. М. Курочкин*

3866. Расчет схем логических «пирамид» вида «или-и-или» для цифровых вычислительных машин. Глук, Грей, Лиондес, Рубинов (The desing of logical or-and-or pyramids for digital computers. Gluck S. E., Gray H. J., Jr, Leondes C. T., Rubinoff M.), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 10, 1388—1392 (англ.)

Приводится детальное рассмотрение и расчет схемы логической «пирамиды» вида «или-и-или» на германиевых диодах с импульсным усилителем мощности на выходе и обратной связью. Данная схема работает в вычислительной машине МСАК (MSAC).

Предлагается новая, проверенная экспериментально методика расчета подобных «пирамид», дающая значительные преимущества. Приводятся эквивалентные схемы и расчетные уравнения.

Преимущества сводятся к сокращению числа используемых диодов, возможности уменьшения вдвое питающих напряжений, увеличению импедансов, что дает возможность уменьшить число усилителей мощности, заметному уменьшению времени нарастания и спада, что увеличивает надежность.

Данные логических «пирамид», построенных для аналогичных условий (величина входных импульсов 30 *в*) на основе старого и нового методов расчета, приводятся в таблице. Исследуются возможности повышения экономичности схемы; предлагается уменьшать анодное напряжение и напряжение отсечки ламп путем уменьшения экранного напряжения. Это позволит снизить величину рабочих импульсов.

Для экспериментального подтверждения своих выводов авторы испытали оба варианта схем в режиме уменьшенных в пять раз напряжений, что привело к пятикратному снижению токов и двадцатипятикратному уменьшению мощности. Самая большая логическая «пирамида» машины МСАК на 125 входов в таком режиме потребляла бы не более 1 *вт*. На основе этого эксперимента авторами была построена новая схема логической «пирамиды» на сверхминиатюрных лампах типа 6АК5 и 6АН6 (при отсечке — 1 *в*), миниатюрных сопротивлениях, что существенно сократило монтажную емкость. Испытание дало положительные результаты. Схема дает пятидесятикратную экономию энергии по сравнению с первоначальной схемой машины МСАК.

Упоминается о возможности применения вместо ламп кристаллических триодов. *И. Д. Горелова*

3867. **Основы техники вычислительных машин. I.** Гуделл (The foundations of computing machinery. I. Goodell John D.), J. Computing Systems, 1952, **1**, 1—13 (англ.)

Основы техники вычислительных машин. II. Гуделл (The foundations of computing machinery. II. Goodell John D.), J. Computing Systems, 1953, **1**, 86—110 (англ.)

В этих двух статьях автор стремится установить взаимопонимание между специалистом по математической логике и инженером — специалистом по математическим машинам. С этой целью он вводит некоторое число логических знаков, которые могут быть полезны при проектировании машин. Эти знаки наглядны и обозначают такие операции как «и», исключающее и неисключающее «или», «не» и т. д. Используя эти символы, можно проектировать схемы в логических терминах. Этот подход аналогичен использованию Нейманом знаков, предложенных Питсом и Мак-Каллохом для обозначений «элементов нервной системы». (Имеется в виду работа McCulloch, Warren S., Pitts W., Bull. Math. Biophys., 1943, 5, 115—133. — *Прим. ред.*) Для иллюстрации метода автор подробно рассматривает некоторые из этих схем. *Голдстайн (H. H. Goldstine)*

Из Math. Rev., 1953, **14**, № 7, 691.

3868. **Электронные счетные машины** (Electronic computers), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 7, 941 (англ.)

Краткое сообщение о докладе Уэйтча (Weitch E. W.) на семинаре одного из подразделений профессиональной группы электронных счетных машин Института радиоинженеров США. Автор доклада описал графический метод, изложенный в его работе «Методы логического проектирования как средство сокращения оборудования счетной машины».

3869. **Британская выставка приборной промышленности.— Электронная цифровая вычислительная машина** (British instrument industries exhibition.— Electronic digital computer), Engineering, 1953, **175**, № 4561, 808 (англ.)

Приводятся технические данные электронной вычислительной машины Манчестерского университета (Англия), экспонированной на выставке фирмой «Ферранти» (РЖМат, 1953, 477, 1434). Машина состоит из двух шкафов, каждый из которых имеет размеры 4,8 × 1,2 × 2,4 *м*, и пульта управления. Отдельные узлы машины смонтированы на подвижных шасси, установленных на петлях подобно дверям.

Запоминающее устройство на магнитном барабане вмещает 650 000 двоичных цифр, что соответствует приблизительно 15 000 двенадцатиразрядных десятичных чисел. Быстродействующее запоминающее устройство на электростатических трубках вмещает 10 000 двоичных цифр, или около 3000 десятичных цифр. Ввод с перфоленты со скоростью 200 знаков в 1 сек. Вывод результатов на перфоленту с одновременной печатью при помощи телетайпа.

На выставке также демонстрируется отдельное фотоэлектрическое устройство для считывания с перфолент с 5 и 7 отверстиями (РЖМат, 1954, 2757). Скорость считывания 200 знаков в 1 сек.

Н. Я. Матюхин

3870. **Спрос на электронные счетные машины** (Electronic computers in demand), Mach. Market, 1953, № 2, 760; 37—38 (англ.)

Сообщается, что английская фирма «Ферранти» (Ferranti, Ltd., Hollinwood) получила предложение на поставку в США электронных счетных машин. Первая счетная машина, изготовленная фирмой три года назад для Манчестерского университета (см. реф. 3869), стоила около 80 000 фунтов стерлингов, т. е. значительно дешевле, чем подобные машины, изготовленные в США. Всего фирма изготовила три счетные машины, одна из которых находится в Манчестерском университете, вторая изготовлена для английского правительства, а третья — для Торонтского университета в Канаде (РЖМат, 1953, 940), где она используется для расчетов водных режимов в устье реки Св. Лаврентия. Раньше на такую работу потребовалось бы около 20 лет, теперь она проводится в течение 25 дней. Сейчас в производстве находятся еще четыре машины: одна для нефтяной компании в Амстердаме (РЖМат, 1953, 938, 939), две для английского правительства и одна машина для нужд самой фирмы.

3871. **Британская выставка приборной промышленности.— Фирма «Ферранти»** (British instrument industries exhibition.—«Ferranti», Ltd.), Engineer, 1953, **196**, № 5086, 72 (англ.)

Приведены краткие сведения об электронной цифровой машине фирмы «Ферранти» («Ferranti», Ltd.). Помещена фотография машины, на которой хорошо видна конструкция подвижных блоков. См. реф. 3869. *Н. Я. Матюхин*

3872. **Западная конференция по электронике в августе 1953 г.** (Western electronic show and convention, August, 1953), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 8, 1069—1071 (англ.)

Перечень докладов, сделанных на конференции, в котором указано 8 докладов по вычислительным машинам (устройствам ввода и вывода, преобразователям, магнитным материалам, запоминающим устройствам). *Н. Я. Матюхин*

3873. **Конференция по электронике на Западном побережье назначена на 19 августа в Сан-Франциско** (West coast electronics show set for Aug. 19 in San Francisco), Telecommuns Repts, 1953, **19**, № 47, 27 (англ.)

Указано, что на конференции будет представлено 85 докладов в секциях электронных приборов, вычислительных машин, спектральных характери-

стик помех и сигналов, самолетной аппаратуры, техники измерений ядерных излучений и др. (см. реф. 3872). *Н. Я. Матюхин*

3874. III сессия по моделированию и счетной технике (Symposium III on simulation and computing techniques), Computers and Automation, 1953, 2, № 5, 19 (англ.)

Краткое сообщение организации «Проект Тайфун» (Project Typhoon) о созыве 12—14 октября 1953 г. в районе Филадельфии третьей сессии по моделированию и счетной технике. На сессии предполагается рассмотреть следующие вопросы: математическое и физическое моделирование, успехи в проектировании счетных машин, технические средства моделирования и их применение, методы определения и улучшения точности решения задач на моделирующих устройствах, методы контроля, анализ ошибок.

3875. Список организаций, работающих в области счетных машин и автоматики. 9-й список, дополнительный, по состоянию на 15 июня 1953 г. (Roster of organizations in the field of computers and automation, 9 ed., supplement, information as of June 15, 1953), Computers and Automation, 1953, 2, № 5, 11—13 (англ.)

В список включены 19 организаций США, занимающихся счетными машинами и автоматикой. Он представляет дополнение к спискам № 7 и № 8 (РЖМат, 1953, 1452, 1454).

3876. Электрическое вычислительное устройство для решения систем линейных алгебраических уравнений. Мани, Оппенгейм, Амицур (An electrical computer for the solution of linear simultaneous equations. Many Abraham, Oppenheim Uri, Amitsur Shimshon), Rev. Scient. Instrum., 1953, 24, № 2, 112—116 (англ.)

Описывается электрическое моделирующее устройство для решения симметричной системы линейных действительных алгебраических уравнений со многими неизвестными. Построенный прибор позволяет решать до девяти уравнений. Коэффициенты уравнений представляются в виде индуктивностей и емкостей. Отдельные цепи, состоящие из LC-контуров, соединены параллельно при помощи промежуточных емкостей. Используется схема устройства для определения собственных значений и собственных векторов симметричных матриц, описанного раньше в статьях Мани (Many A., Rev. Scient. Instrum., 1947, 18, 831; 1950, 21, 972). Искомые неизвестные определяются в виде напряжений на катушках индуктивностей.

Схема питается генератором фиксированной частоты в 3000 *гц*. В соответствии с законом Кирхгофа распределение напряжений на катушках индуктивностей L подчиняется уравнениям:

$$\left[2C_\alpha + \sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{n+1}(A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta}) - 2/\omega_0^2 L\right] V_\alpha +$$

$$+ \sum_{\substack{\beta=1\\ \beta\neq\alpha}}^{n}(A_{\alpha\beta} - B_{\alpha\beta}) V_\beta + (A_{\alpha n+1} - B_{\alpha n+1}) V_0 = 0,$$

где $\alpha = 1, 2, \ldots, n$; $\beta = 1, 2, \ldots, n+1$; C_α — емкости, включенные параллельно L в α контуре; $A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$ — соединительные емкости; V — напряжение на каждой из n индуктивностей; V_0 — напряжение на $n+1$ катушке индуктивности $(n+1)$-го LC-контура (напряжение генератора); ω_0 — частота генератора.

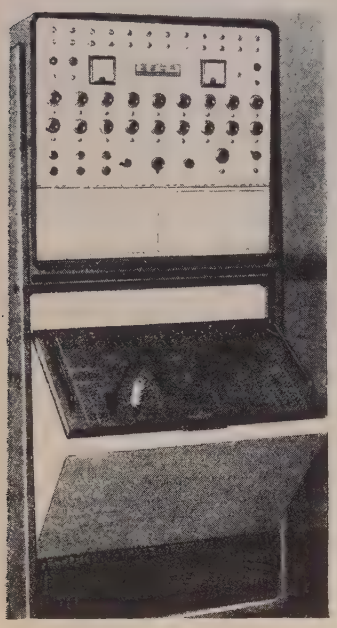
Написанные уравнения будут идентичны заданным уравнениям после простых преобразований. Рассматриваются ошибки схемы, возникающие вследствие потерь в индуктивности, и ошибки из-за недостаточной точности емкостей. Ошибки из-за потерь в индуктивностях могут быть скорректированы. Измерения напряжения на индуктивностях производятся при помощи компенсационной схемы, путем сравнения их с напряжением потенциометра, включенного последовательно с регулируемым LC-контуром. Измеренные напряжения включаются поочередно в компенсационную схему при помощи двухполюсного многопозиционного переключателя. В качестве нуль-прибора компенсационной схемы применен катодный осциллограф с промежуточным усилителем. Напряжение небаланса подается на Y пластины осциллографа, а напряжение генератора — на X пластины. Баланс компенсационной схемы соответствует появлению на экране горизонтальной линии. Точность решения уравнений составляет около 0,1%. Полное время решения системы девяти уравнений, включая операцию измерения напряжений, составляет 1 час. Если же требуемая точность составляет 1%, то полное время решения уменьшается до 20 мин. *Ф. В. Майоров*

3877. Применение электронных моделирующих устройств к техническим проблемам. Менели, Моррилл (Application of electronic differential analyzers to engineering problems. Meneley C. A., Morrill C. D.), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, 41, № 10, 1487—1496 (англ.)

Рассматриваются электронные моделирующие устройства, предназначенные для решения дифференциальных уравнений, а также их применения для решения задач динамики регулирования в сервосистемах. На фото в качестве типичного примера показаны общий вид установки ГЕДА (GEDA-Goodyear Electronic Differential Analyser) фирмы «Гудиир» для решения системы 6 дифференциальных уравнений; высота ее составляет 1,8 *м*, установка потребляет около 1 *кв* электроэнергии. Рассматриваются общие требования к элементам таких устройств. Основными элементами моделирующего устройства являются суммирующие, интегрирующие, масштабные и копирующие усилители постоянного тока, функциональные генераторы, множительные устройства и компараторы для сравнения напряжений. К усилителям постоянного тока предъявляются следующие требования: 1) напряжение любой полярности на выходе; 2) большой коэффициент усиления, лежащий в пределах $50 \cdot 10^3$ — $500 \cdot 10^3$ на низких частотах; 3) допустимый фазовый сдвиг на низких частотах в диапазоне 0,001—0,01° на 1 цикл в 1 сек.; 4) большой входной импеданс; сеточные токи в усилителях этого типа лежат в пределах 10^{-9}— 10^{-11}; 5) малый дрейф нуля (0,1—10 *мв* в час для выходного напряжения от 0 до ±100 *в*).

Для умножения напряжений применяются электромеханические и электронные схемы. Электрон-

ные множительные устройства дают большую скорость вычислений, но сложнее, чем электромеханические (например, сервосистема с потенциометрами), и имеют в 4—5 раз больше электронных ламп. Точность электронных множительных устройств лежит в диапазоне от 1% до 0,01% в зависимости от скорости вычислений и сложности их.



К реф. 3877

Функциональные генераторы также применяются как электромеханические (повторители кривых с сервосистемами, профильные потенциометры с шунтирующими сопротивлениями и т. д.), так и электронные (с диодами или кристаллическими выпрямителями, с электронолучевой трубкой и т. д.). Точность функциональных устройств лежит в пределах до 1%, но может быть получена и более высокая точность. Компаратор служит для сравнения двух входных напряжений и представляет собою усилитель постоянного тока с диодом (или реле) на выходе, который пропускает ток, когда одно напряжение равно другому. Точность их лежит в пределах от 0,1% до 0,01%.

Распространенные функции, такие как $\sin x$ и $\cos x$, или эмпирические кривые могут быть заданы входными устройствами в форме кривых. Выходные устройства применяются двух типов: для записи результата в функции времени и для записи одного напряжения в функции другого. Эти устройства могут записывать напряжения, изменяющиеся с частотой 1 *гц* и с точностью 0,2%. Существуют и высокоскоростные устройства, которые позволяют записывать напряжение, скорость изменения которого достигает 100 *гц*, с точностью 2%.

Технические применения моделирующих устройств для решения дифференциальных уравнений весьма широки. В качестве одного из примеров рассмотрена схема для сервомеханизма с нелинейными характеристиками (насыщение усилителя, нелинейные характеристики двигателя, люфты, кулоново трение и др.). Нелинейность характеристики создается в схеме при помощи диодных ограничителей напряжения и сопротивлений, включенных последовательно с ними. Могут быть составлены как схемы решения уравнений динамики, так и схемы, иммитирующие сервомеханизм и его отдельные элементы непосредственно без составления уравнений.

Для большинства задач, требующих для своего описания до 12 уравнений, моделирующее устройство должно включать в себя следующие элементы: 45—50 линейных элементов (сумматоров, интеграторов и т. д.), 3—5 функциональных генераторов; 3—5 компараторов; 3—5 множительных устройств; 4—6 записывающих каналов; 2—4 записывающих устройств. *Ф. В. Майоров*

3878. Моделирующее устройство для получения обратных функций. Томас (An analogue reciprocal function unit for use with pulsed signals. Thomas P. A. V.), Electronic Engng, 1953, **25**, № 305, 302—304 (англ.)

Для получения обратных функций в моделирующих устройствах используются различные методы, которые можно подразделить на четыре категории:

1. Электромеханические (с потенциометром, сервомотором и обратной связью через усилитель). Недостаток — медленная скорость реакции.

2. Логарифмические (с использованием нелинейных свойств ламп, выпрямителей и т. п.). Недостаток — нестабильность.

3. Использующие характеристики ламп для умножения или деления на ограниченном участке. Недостаток — нестабильность, дрейф.

4. Импульсные.

Приведена полная принципиальная схема (с указанием параметров всех элементов), построенная по принципу преобразования импульсов. Схема состоит из триггера с одним устойчивым состоянием и генератора пилообразного напряжения. Продолжительность импульсов триггера обратно пропорциональна напряжению на входе. Генератор пилообразного напряжения преобразовывает импульсы триггера в напряжение, максимальное значение которого также обратно пропорционально напряжению на входе. Схема содержит 11 ламп (9 колб). Максимальная продолжительность импульса 10 *мксек*. Погрешность порядка 2% от максимума при изменении входной функции в диапазоне 1 : 2,4. Приведены теоретические соображения по получению импульсов переменной длительности.

Библиография 11 названий. *Н. В. Корольков*

3879. Моделирующее устройство «Боинг» (How to expand your engineering brainpower... Boeing), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 10, 115A (англ.)

Рекламное объявление фирмы «Боинг» (Boeing Airplane Co.) о продаже моделирующего устройства фирмы. Перечислены составляющие его элементы: 1 стол, включая панель источника питания и распределителя мощности; 1 контрольная панель; 20 усилителей (12 операционных для суммирования и интегрирования и 8 других); 12 диодов для нелинейных схем; 20 потенциометров; 1 мост сопротивлений и вольтметр для калибровки; 1 батарея, 4 электронных стабилизатора напряжения. Кроме того, в комплект включаются сервоумножители, функциональные генераторы, автоматические балансные устройства и другие элементы. Приведена фотография; стоимость устройства 6.975 долларов. *Ф. В. Майоров*

3880. Экономически оправданное моделирующее устройство (Economically justified analogue computer), Manufact. and Industr. Engng, 1953, **31**, № 4, 58 (англ.)

Сообщение канадской фирмы «Компьютинг Дивайсиз» (Computing Devices of Canada) о продаже элек-

тронного моделирующего устройства БЭАК (BEAC — Boeing Electronic Analog Computer) производства самолетостроительной компании «Боинг» (Boeing Airplane Co.) (см. реф. 3879). *Л. И. Гутенмахер*

3881. Новые электрические моделирующие устройства и их применение для задач проектирования самолетов. Мак-Канн, Уилтс (New electric analog computers and their application to aircraft design problems. (Abstract). McCann G. D., Wilts C. H.), Digital and Analog Computers and Computing Methods Symposium at the 18th Appl. Mech. Div. Conf. of the Asme held at the Univ. of Minnesota, June 18—20, 1953, New York, 20 (англ.)

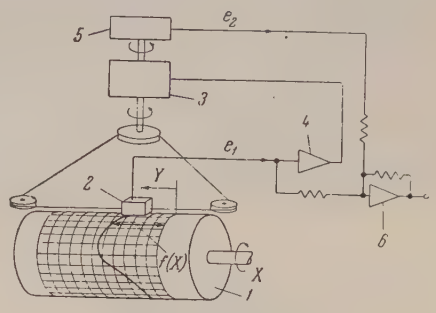
3882. Блок ввода и вывода для моделирующих устройств. Ванс, Хас (An input-output unit for analog computers. Vance P. R., Haas D. L.), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 10, 1483—1486 (англ.)

Описывается следящее устройство, которое применяется для ввода в машину функций, заданных в виде графика (функциональное устройство), а также для графической записи результата вычислений в машинах непрерывного действия.

Функциональное устройство (фиг. 1, 2) состоит из барабана *1*, на поверхность которого накладывается график заданной функции $y = f(x)$, начерченный на миллиметровой бумаге (размер графика 20,3 × 28 *см*). Вал x барабана вращается сервомеханизмом аргумента x, а перемещение следящей головки *2*, скользящей по кривой $y = f(x)$ вдоль оси барабана, пропорционально y. Следящая головка *2* перемещается серводвигателем *3*, управляемым электронным усилителем *4*. Потенциометр *5*, движок которого перемещается на валу серводвигателя *3* (через редуктор), дает напряжение, пропорциональное координате y. Кривая $y = f(x)$ наносится на графике токопроводящим составом. С ней соприкасаются в некоторой точке кривой две щетки, расположенные поперек кривой и имеющие вид тонких карточек из изоляционного материала, на которых нанесены перпендикулярно к краю карточки очень тонкие никелевые полоски (одна полоска приходится на 0,25 *мм*). Одна щетка служит как токосъемная, а вторая является потенциометром благодаря тому, что поперек никелевых полосок нанесен слой сопротивления. При отклонении середины следящей головки от кривой $y = f(x)$ появляется напряжение e_1, пропорциональное величине отклонения. Это напряжение ошибки получается вследствие того, что средняя точка потенциометра, нанесенного в виде сопротивления на одной щетке, смещается относительно кривой, с которой все время соприкасается вторая токосъемная щетка. Напряжение ошибки e_1 усиливается усилителем *4* и при помощи серводвигателя *3* достигается непрерывное слежение головки *2* по кривой. Динамические ошибки, возникающие при слежении по кривой с большой скоростью, компенсируются благодаря применению суммирующего усилителя *6*, на вход которого подается сумма напряжений $e_1 + e_2$.

К реф. 3882

Фиг. 1



К реф. 3882

Фиг. 2

Авторами показано теоретически и экспериментально, что выходное напряжение усилителя правильно воспроизводит заданную функциональную зависимость при времени слежения по кривой порядка десятых долей секунды. Описанное функциональное устройство было применено для определения амплитудного спектра периодической функции, разложенной в ряд Фурье. Оно применялось в схеме совместно с другими элементами электронного устройства для решения дифференциальных уравнений : интегрирующими, суммирующими усилителями и множительным устройством. Синусные и косинусные функции вводились при помощи схемы решения дифференциального уравнения, определяющего эти функции.

Функциональное устройство может применяться также в вычислительных устройствах для изучения управляемых ракет в качестве самописца для вычерчивания траекторий ракеты, в аэродинамических исследованиях, исследованиях автопилотов и т. д. Статическая точность функционального устройства составляет 0,2% от всей шкалы. Максимальная линейная скорость вращения барабана по оси X 25 *см* в 1 сек. и по оси Y 17,8 *см* в 1 сек. Масштаб шкалы оси X (цена деления) может быть установлен от 0,5 *мв* до 10 *в* на 2,5 *см*. Масштаб оси Y составляет 10 *в* на 2,5 *см*. *Ф. В. Майоров*

3883. Запоминающие устройства цифровых вычислительных машин. Дюсин (Les mémoires dans les calculatrices arithmétiques. Dussine R.), Onde électr., 1953, **33**, № 316, 453—455 (франц.)

Краткое описание основных видов запоминающих устройств, применяемых в быстродействующих

вычислительных машинах, работающих по двоичной системе счисления. Автор разбивает эти устройства на три группы: 1) устройства малой емкости: триггера, электромагнитные линии задержки; 2) устройства средней емкости: ультразвуковые линии (ртутные и никелевые), электростатические трубки и магнитные устройства, использующие гистерезис; 3) устройства большой емкости: магнитные ленты и барабаны.

Приведена литература (21 название), частично аннотированная. *К. А. Семендяев*

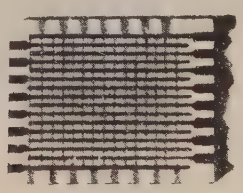
3884. **Новое быстродействующее магнитное запоминающее устройство** (New high-speed magnetic memory), Tele-Tech, 1953, **12**, № 9, 59 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 2754.

Указывается на возможность увеличения объема запоминающего устройства до 10^6 двоичных цифр. *Н. М.*

3885. **Кристалл, который может запоминать данные** (Crystals that remember), Bell. Labs Rec., 1953, **31**, № 8, 316—317 (англ.)

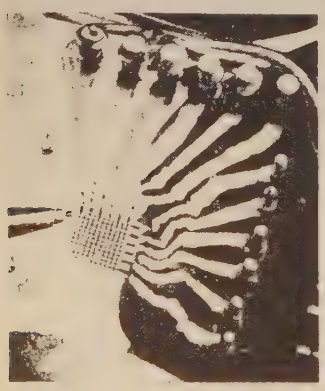
Сообщение о возможности использования кристаллов титаната бария для запоминания кодов



К реф. 3885

Фиг. 1

двоичных чисел в виде электрических зарядов. Приведены следующие данные относительно такого запоминающего элемента. Искусственно выращенный кристалл титаната бария, площадь которого составляет 3,2 *см*², а толщина около 0,1 *мм* (несколько тысячных дюйма), может хранить в течение неограниченного промежутка времени приблизительно 250 кодов чисел. Запись кода осуществляется приложением положительного или отрицательного напряжения (в зависимости от записываемого кода).



К реф. 3885

Фиг. 2

Разрабатывавшееся для применения в оборудовании телефонных станций (взамен системы реле, воспринимающих набираемый номер), такое устройство хранения кодов может быть использовано в электронных счетных машинах, что значительно сократит их габариты. Приведены фотографии запоминающего элемента емкостью 256 кодов (фиг. 1) и запоминающего элемента на 36 кодов с подводкой к нему (фиг. 2; для сравнения слева показан конец карандаша). Указывается, что емкость последнего элемента может быть увеличена до 144 кодов. См. РЖМат, 1953, 1476. *Н. И. Бродович*

3886. **Плоские ферроэлектрические кристаллы, обладающие способностью запоминать большое количество данных и существенно необходимые для автоматических телефонных систем, разработаны лабораториями Белла** (Flat ferroelectric crystals with ability to store vast amounts of information, vital to dial system, developed by Bell Laboratories), Telecommuns Repts, 1953, **19**, № 43, 30 (англ.)

См. РЖМат, 1953, 1476.

3887. **Магнитные устройства облегчают проектирование вычислительных машин** (Magnetic blocks aid computer design), Aviat. Week, 1953, **58**, № 26, 39 (англ.)

Сообщение фирмы «Миннесота Электроникс» (Minnesota Electronics Corp.) о выпуске стандартных малогабаритных магнитных элементов для применения в вычислительных машинах. Их можно использовать в качестве основных элементов счетчиков, арифметических и запоминающих устройств и устройств управления. Магнитные элементы не содержат ни ламп, ни полупроводниковых триодов, имеют малый вес, герметизированы, имеют хорошую амортизацию. Размеры одного элемента 2,5 × 2,5 × 2,5 *см*. Приведены фотографии. *Н. Я. Матюхин*

3888. **Магнитные счетные элементы** (Magnetic decision elements), Radio and Telev. News, Radio-Electr. Engng Sec., 1953, **50**, № 2, 25 (англ.)

См. реф. 3887.

3889. **Элементы для цифровых вычислительных машин** (Basic elements for digital computers), Instruments, 1953, **26**, № 7, 984 (англ.)

См. реф. 3887. Скорость прохождения импульсов 100 *кгц*. Выключение питания не влечет уничтожения данных, хранящихся в запоминающих элементах. *Н. Я. Матюхин*

3890. **Запоминающее устройство** (Memory unit), Rev. Scient. Instrum., 1953, **24**, № 8, 711—712 (англ.)

Сообщение фирмы «Компьютер Контрол» (Computer Control Co., Mass., USA) о выпуске акустического запоминающего устройства на кварцевых линиях задержки. Устройство собрано на отдельных вставных блоках размером 114 × 140 × 254 *мм*. Каждый блок может запоминать 384 знака при частоте повторения в 1 *Мгц*; несущая частота 20 *Мгц*; блоки термостатируются. Германиевые диоды собраны в отдельных вставных блоках. В каждом блоке 5 ламп, все лампы типа 6AN5. Уровень на входе вентиля записи 10 *в*, уровень после вентиля восстановления 15 *в* на нагрузке в 100 *ом*. Устройство вибростойко и предназначено для установки на борту самолета. *Л. В. Кутуков*

3891. Линии задержки (Delay line), Rev. Scient. Instrum., 1953, 24, № 5, 408 (англ.)

Сообщение фирмы «Девелопментл Электроникс» (Developmental Electronics Corp., Calif., USA) об изготовляемых ею стандартных линиях задержки.

Модель D5Z10R1-5: задержка $0{,}5 \cdot 10^{-6}$ сек.; полное сопротивление 1000 *ом*; затухание не свыше 1 *дб*; время нарастания не свыше $0{,}15 \cdot 10^{-6}$ сек.; габариты: длина 37,5 *мм*, диаметр 11 *мм*.

Модель D5Z5R-1: задержка $0{,}5 \cdot 10^{-6}$ сек.; полное сопротивление 500 *ом*; затухание не свыше 1 *дб*; время нарастания не свыше $0{,}1 \cdot 10^{-6}$ сек.; габариты 88 × 11 × 10 *мм*.

Допуска лежат в пределах ±10%. Диапазон рабочих температур составляет от —55° до 125°. Приведена фотография линий обоих типов.

В. А. Зимин

3892. Миниатюрная линия задержки (Miniature delay line), Electronics, 1953, 26, № 3, 362, 364 (англ.)

См. РЖМат, 1953, 1463.

3893. Формирующая линия задержки (Pulse forming network), Radio and Telev. News, 1953, 49, № 5, 20 (англ.)

Сообщение о выпуске фирмой RCA промышленного типа линии задержки для целей формирования импульса. Длительность формируемого импульса $0{,}15 \cdot 10^{-6}$ сек. Сопротивление линии задержки 1050 *ом*; размеры: диаметр 8 *мм*, длина 43 *мм*.

В. А. Зимин

3894. Линии задержки. Пейн (Artificial delay lines. Paine R. C.), Radio-Electronics, 1953, 24, № 3, 92, 95, 96—97 (англ.)

Дается общее представление о линиях задержки и о некоторых физических явлениях, которые можно наблюдать в длинных линиях и линиях задержки (стоячие волны, отраженные от конца линии сигналы и др.), указываются применения. Новых данных не приводится.

П. П. Головистиков

3895. Триггерная ячейка в миниатюрной прочной упаковке (Flip-flop in tiny, rugged package), Electronics, 1953, 26, № 7, 300—301 (англ.)

Сообщение о выпуске фирмой «Компьютер Рисёрч Корпорейшн» (Computer Research Corp.) феррорезонансной триггерной ячейки (модель 133), занимающей объем около 15 $см^3$ и способной заменить электронные лампы в счетных машинах. Эта ячейка потребляет меньше энергии, чем лампа, и отдает на выходе свыше 90% входной энергии.

К. А. Семендяев

3896. Сверхминиатюрный импульсный трансформатор (Subminiature pulse transformer), Electr. Manufact., 1953, 51, № 1, 152, 154 (англ.)

Объявление фирмы «Джекобс» (Jacobs Instrument Co.) о выпуске импульсных трансформаторов для вычислительных машин, телеметрических устройств и т. п. применений. Трансформатор имеет две обмотки с отношением 1 : 1. Размеры трансформатора: диаметр 8 *мм*, толщина 3 *мм*.

В. А. Зимин

3897. Опытные данные о надежности и сроке службы полупроводниковых триодов в быстродействующей цифровой счетной машине. Скалон (Life and reliability experience with transistors in a high speed digital computer. Scanlon J. J.), Conven. Rec. Inst. Radio Engrs, 1953, ч. 7, 20 (англ.)

Краткое сообщение об опыте эксплуатации полупроводниковых триодов в быстродействующем электронном множительном устройстве, предназначенном для умножения двух 16-значных двоичных чисел. Приведены следующие данные относительно этого устройства и его работы.

Множительное устройство содержит 500 полупроводниковых диодов для выполнения логических операций и 78 полупроводниковых триодов, которые являются единственными его активными элементами. Оно работает при частоте повторения импульсов 1 *Мгц*; время умножения двух 16-значных двоичных чисел составляет 272 *мксек.*; максимальный применяемый потенциал равен 8 *в*; потребление около 5 *вт* (не считая генератора главных импульсов, имеющего приблизительно такое же потребление).

В течение 3000 час. непрерывной работы (за это время суммарная продолжительность эксплуатации всех полупроводниковых триодов составила 234000 час.) было зафиксировано одно повреждение полупроводникового триода, которое произошло после 1430 час. работы.

В замкнутых цепях устройства циркуляция кодов двоичных чисел продолжалась сотни часов без случайных ошибок (приведен пример беспрерывной циркуляции кодов чисел в течение 700 час., закончившейся вследствие повреждения питания). В соответствии с частотой повторения импульсов за каждый час работы каждый полупроводниковый триод должен был выполнять $3{,}6 \cdot 10^9$ операций без ошибок.

Производились периодические испытания работы устройства при изменении напряжений источников питания до их граничных значений. Эффект старения элементов при этом не был обнаружен.

Н. И. Бродович

3898. Уравнения полупроводникового триода. Стансел (Transistor equations. Stansel F. R.), Electronics, 1953, 26, № 3, 156, 158 (англ.)

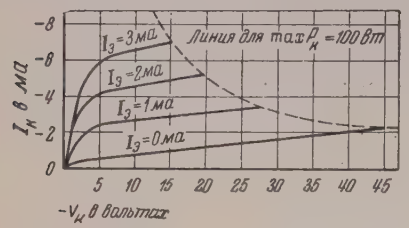
Таблица выражений для коэффициентов усиления и сопротивлений входа и выхода полупроводниковых усилителей, построенных по трем типовым схемам: с заземленным основным электродом, с заземленным эмиттером и с заземленным коллектором. Приводимые величины даются уравнениями, правая часть которых содержит постоянные эквивалентной схемы полупроводникового триода и ее внешних цепей; указываются упрощенные выражения и соответствующие им соотношения постоянных.

Н. И. Бродович

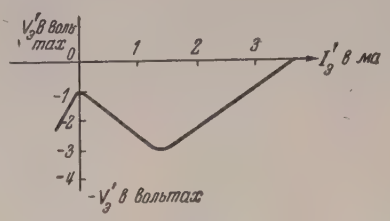
3899. Полупроводниковые триоды фирмы CBS-Hytron (CBS-Hytron transistors), Radio and Telev. Weekly, 1753, 75, № 10 (англ.)

Рекламное сообщение фирмы CBS-Hytron о выпуске точечно-контактных полупроводниковых триодов типов PT-2A и PT-2S. Первый предназначен для усилительных, а второй для коммутационных целей. Указывается, что триоды могут работать при температуре до 55°. Исполнение триодов предполагает их установку в панель этой же фирмы типа T-2.

Приведены статическая коллекторная характеристика триода PT-2A (фиг. 1), эмиттерная характеристика триода PT-2S для $V_{kk} = -10$ *в*, $R_b = 2000$ *ом* и $R_L = 2000$ *ом* (фиг. 2), общий вид и разрез триодов, а также общий вид панели типа T-2.



К реф. 3899 Фиг. 1



К реф. 3899 Фиг. 2

Н. И. Бродович

3900. Фирма CBS-Hytron совершенствует запаянные полупроводниковые триоды, чтобы обеспечить их высокие эксплуатационные качества (CBS-Hytron develops sealed transistors for superior service), Radio and Telev. Weekly, 1953, **75**, № 25, 5 (англ.)

Краткое сообщение о разработке фирмой CBS-Hytron новой конструкции полупроводниковых триодов с поверхностным контактом.

Указывается, что для увеличения надежности работы полупроводниковых триодов с поверхностным контактом в слуховых аппаратах потребовалась защита от влаги. Поскольку первоначальная конструкция триодов с пластмассовой оболочкой оказалась недолговечной, была разработана конструкция герметически запаянного триода, которая указала путь изготовления слуховых аппаратов на полупроводниковых триодах.

В настоящее время создана более усовершенствованная конструкция, предусматривающая запайку триода в металлическую оболочку, в которой создается вакуум. Такая конструкция, помимо придания триоду влагостойкости, предохраняет его от утечек и замыканий переходного слоя. *Н. Б.*

3901. Германиевый триод типа GET 1 фирмы «Дженерал Электрик» (G. E. C. germanium triode GET 1), Radio Constr., 1953, **7**, № 1, 30—31 (англ.)

Сообщение фирмы «Дженерал Электрик» о точечно-контактном германиевом триоде типа GET1.

Приведены следующие данные этого триода: коэффициент усиления тока больше 2; напряжение у колена статической коллекторной характеристики меньше 3 *в*; ток коллектора при напряжении —30 *в* и при нулевом токе эмиттера меньше 2 *ма*; максимальное напряжение коллектора — 50 *в*; типовое рабочее напряжение коллектора — 22,5 *в*; предельная мощность, рассеиваемая коллектором, 100 *мвт*.

Триоды находятся в настоящее время в стадии опытного производства и поставляются изготовителям оборудования для экспериментальных работ и макетов оборудования. Они могут быть применены в усилительных и коммутационных схемах, в частности в электронных счетных машинах, для которых они весьма подходят по своим электрическим характеристикам.

Приведены статическая коллекторная характеристика и схема усилителя малых сигналов, который может дать усиление мощности более 17 *дб*.

Н. Б.

3902. Германиевый триод GET1 фирмы «Дженерал Электрик» (G. E. C. germanium triode GET 1), Electronic Engng, 1953, **25**, № 307, 15 (англ.)

Рекламное объявление фирмы «Дженерал Электрик» о выпуске в продажу точечно-контактного германиевого триода типа GET 1. Приведены предельно допустимые эксплуатационные данные и некоторые данные характеристик.

Даны фотография триода и коллекторная статическая характеристика. Указаны габаритные размеры.

См. реф. 3901. *Н. И. Бродович*

3903. Германиевый триод (Germanium triode). Brit. Electr. and Allied Manufact. Assoc. J., 1953. **60**, № 195, 307—308 (англ.)

См. реф. 3901, 3902.

3904. Точечно-контактный германиевый триод (Point-contact germanium triode), Engineering. 1953, **176**, № 4565, 126—127 (англ.)

См. реф. 3901, 3902.

3905. Германиевый триод (Germanium triode). Electr. Manufacturer, 1953, **4**, № 4, 125 (англ.)

См. реф. 3901, 3902.

3906. Схемы включения и применение германиевых триодов. Шумейкер (Transistor circuits and applications. Shoemaker H. F.), Radio-Telev. and Appliance Sales, 1953, **9**, № 8, 40, 60—61 (англ.)

Кратко рассматриваются три основные схемы включения германиевых триодов. Приведены типовые значения коэффициента усиления мощности, а также входного и выходного сопротивлений каждой из схем в случае применения в ней триода с поверхностным контактом и точечно-контактного триода.

Отмечается, что за короткий срок полупроводниковые триоды, так же как и другие полупроводниковые электронные приборы (полупроводниковые фотоэлементы, полупроводниковые диоды), значительно продвинулись в своем развитии. В частности, доказывается, что в настоящее время уже разрабатываются полупроводниковые диоды с поверхностным контактом для токов порядка 350 *ма*, выдерживающие обратные напряжения порядка 400 *в*.

3907. Переход к полупроводниковым триодам. Кайзер (Transition to transistors. Kaiser Bob), Purdue Engr, 1953, **48**, № 5, 16—17, 28, 30 (англ.)

Популярное описание работы германиевого триода и его применений; затрагивается вопрос о значении германиевых триодов для электронных вычислительных машин, управляемых снарядов, военного электронного оборудования и других областей техники.

Приведены фотографии усилительного каскада звуковой частоты и портативного телевизионного приемника, выполненных с использованием германиевых триодов вместо ламп.

3908. Генератор звуковой частоты на германиевом триоде. Гарнер (A transistorized audio oscillator. Garner Louis E.), Radio and Telev. News, 1953, **50**, № 3, 68—69 (англ.)

Описание схемы миниатюрного генератора звуковых колебаний, построенного с использованием германиевого триода СК 722; генератор не имеет других источников питания, кроме освещаемого дневным или искусственным светом селенового фотоэлемента. Приведены схема и фотография генератора. *Н. Б.*

3909. Направления развития техники. Полупроводниковые триоды. Корфилд (Technical trends. Transistors. Corfield Guy), Gas, 1953, **29**, № 6, 29 (англ.)

Краткое популярное описание германиевых триодов; отмечены их общие свойства, конструктивные особенности и области применения.

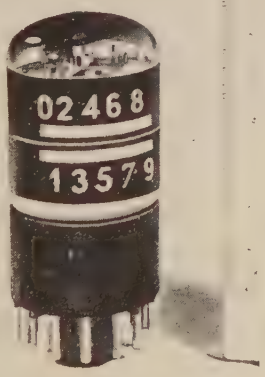
3910. Полупроводниковые триоды и их применения. Диммер (Transistors and their applications. Dimmer Robert P.), Midwest Engr, 1953, **6**, № 2, 9—10, 15 (англ.)

Популярное описание полупроводниковых триодов. Затронуты вопросы изготовления и применения триодов; отмечены их преимущества и недостатки.

3911. Новый полупроводниковый материал (Semiconductor material), Radio and Telev. News, 1953, **49**, № 5, 22 (англ.)

См. РЖМат, 1953, 1479.

3912. Десятичная счетная лампа для высоких скоростей счета. Овербек, Йонкер, Роденхёйс (A decade counter tube for high counting rates. Overbeek A. J. W. M. van, Jonker J. L. H., Rodenhuis K.), Philips Techn. Rev., 1953, **14**, № 11, 313—326 (англ.)



К реф. 3912

Описание электроннолучевой трубки E1T специального устройства, луч которой может иметь 10 устойчивых состояний. Каждое состояние отмечается по положению пятна на флуоресцирующем экране. При подаче импульса на специальный электрод трубки луч переходит в следующее положение. Пройдя девять положений, луч сбрасывается в исходное, и с трубки снимается импульс, передаваемый через формирующую лампу на следующий разряд. Трубка работает с анодным напряжением 300 *в* и выполнена в виде обычной электронной лампы (диаметр 37 *мм*, высота 83 *мм*; см. фото).

Максимальная скорость счета 30 тыс. имп/сек. Разработан опытный образец для работы со скоростью 100 тыс. имп/сек и, при применении в качестве переходных ламп триод-гексода и лампы со вторичной эмиссией, достигнуты скорости порядка 10^6 — 10^7 имп/сек. Недостатком лампы E1T является критичность выбора амплитуды и крутизны фронтов запускающего импульса. В статье подробно освещены вопросы конструкции лампы, схемы ее включения и выбора формы импульсов; приведена 21 фигура, в том числе общий вид семиразрядного десятичного счетчика на лампах E1T и блока одного разряда. *Н. Я. Матюхин*

3913. Десятичная электронная счетная лампа E1T (E1T eine dekadische Zählröhre), Radio Mentor, 1953, **19**, № 7, 313 (нем.)

Объявление фирмы «Электро-специаль» о продаже электронной счетной лампы типа E1T (РЖМат, 1953, 948 и реф. 3912). Цоколь лампы имеет 12 штырьков, из них рабочих 11. На цоколь выведены: нить накала, катод, первая сетка, вторая сетка, отклоняющие пластины, первый анод, четвертая сетка, второй анод и экран. Экран расположен на внутренней части боковой поверхности стеклянного баллона лампы. Внутренняя поверхность экрана покрыта флуоресцирующим веществом, светящимся при попадании на него электронов. Баллон лампы зачернен. В рабочей части экрана чернение с баллона снято в виде цифр от 0 до 9 и двух полос между верхним и нижним рядами цифр. Экран прозрачен, поэтому электронный луч может засветить цифру, соответствующую отклонению луча. Накал лампы можно производить как по параллельной, так и по последовательной схеме переменным или постоянным током. Напряжение цепи накала 6,3 *в*, ток накала 0,3 *а*.

Рабочий режим лампы: напряжение источника питания 300 *в*; напряжение экрана 300 *в*; напряжение второй сетки 300 *в*; напряжение первой сетки 12 *в*; напряжение на отклоняющих пластинах 155 *в*; сопротивление в цепи первого анода 40 *ком*; сопротивление в цепи второго анода 1 *Мом*; сопротивление в цепи четвертой сетки 47 *ком*; сопротивление в цепи катода 15 *ком*; ток второй сетки 0,1 *ма*; ток катода 0,95 *ма*. *В. А. Зимин*

3914. Счетная линейка теплотехника. Буа (Feuerungstechnische Rechenschieber. Boie Werner), Silikattechnik, 1953, **4**, № 10, 461—465 (нем.)

Расчет и описание двух счетных линеек, одна из которых облегчает вычисление удельного объема воздуха, подлежащего подаче в топку, и отходящих газов, другая — средней удельной теплоемкости отходящих газов. Линейки дают значения, определяемые формулами:

$$L = (0{,}186/CO_2 + 0{,}02)(H_u + 550)10^{-3};$$

$$V_f = (0{,}186/CO_2 - 0{,}08)(H_u + 550)10^{-3} + 1{,}17;$$

$$Cp_m = [Cp_{mCO_2} + \rho Cp_{mH_2O} + (1/CO_2 - 1{,}05)\,Cp_{mL}]/(\rho + 1/CO_2),$$

причем $\rho = [6350/(H_u + 550)] - 0{,}45$.

В. М. Брадис

3915 К. Составление программ для электронных счетных машин. Уилкс М., Уилер Д., Гилл С., 208 стр., Изд-во иностр. лит-ры, М., 1953, 11 р. 70 к.

В книге сообщается об опыте эксплуатации английской электронной счетной машины ЭДСАК и приводятся сведения, необходимые для составления программ для этой машины. Предполагается, что программированием будет заниматься не какая-либо специальная группа работников при машине, а сам потребитель; поэтому одной из основных целей книги является ознакомление потребителя с возможностями машины, с методами программирования и с имеющейся библиотекой стандартных подпрограмм, которая используется для программирования конкретных задач.

Книга состоит из трех частей. В первой главе первой части излагаются общие сведения по программированию, о типах автоматических счетных машин, дается краткое описание машины ЭДСАК, полный перечень команд, выполняемых машиной, их кодов, способы изменения команд посредством программы. Во второй главе рассматривается ввод команд. На машине ЭДСАК исходные данные пробиваются в десятичной системе, а коды команд — без дополнительной кодировки, причем адрес пишется также в десятичной системе. Поэтому для чтения с ленты требуется определенная группа команд, которая направляется в память автоматически. Здесь же рассматриваются методы преобразования команд на ЭДСАК. Эта глава представляет интерес также и для конструкторов.

В третьей главе дается понятие об открытых и замкнутых подпрограммах и описывается выбранный для ЭДСАК метод построения операций, вводящих в замкнутую подпрограмму и возвращающих к основной программе после выполнения подпрограммы.

Четвертая глава посвящена описанию библиотеки подпрограмм. В остальных главах первой части рассматривается вопрос об ошибках в составлении программ и методах их обнаружения, описывается вспомогательное оборудование для изготовления перфолент, хранение библиотеки подпрограмм и организация работы на ЭДСАК, приводятся примеры программирования с использованием библиотеки подпрограмм.

Вторая часть содержит описания имеющихся в библиотеке подпрограмм. Приводится по нескольку подпрограмм на каждый из восемнадцати классов подпрограмм, на которые делится библиотека.

Третья часть, по словам авторов, содержит полный текст подпрограмм примерно для половины их общего числа в библиотеке.

Книга несколько трудна ввиду довольно сложной системы кодов и методов преобразования команд, обусловленной конструкцией машины, но представляет интерес для желающих ознакомиться с программированием. *Н. П. Трифонов*

3916 К. Счетно-цифровые машины. Евдокимов И. С., Евстигнеев Г. П., Криушин В. Н., Учебн. пособие для техникумов, 328 стр., Машгиз, М., 1953, 11 р. 05 к.

По принятой в книге классификации все счетные машины делятся на две основные группы: машины с ручным вводом (вычислительные и суммирующие) и машины с автоматическим вводом (счетно-аналитические). В первой части книги описываются вычислительные и суммирующие машины, во второй — счетно-аналитические.

В описании приводятся технические характеристики машин, рассматриваются структура, взаимодействие и регулировка их основных механизмов, управление вычислительным процессом со стороны оператора, электрические схемы счетно-аналитических машин.

Из машин первой группы в книге описаны только машины, основанные на следующих трех конструктивно различных методах механического воспроизводства чисел: вычислительные машины с колесами Однера (обычный арифмометр; машины ВК-1, ВК-2, ВК-3) и с зубчатыми секторами, имеющими переменную ширину зубцов (КСМ), и суммирующие машины со штифтовыми наборными каретками (ДСМ, СДУ-110, СДУ-138, АЕС). Из машин второй группы в книге описаны перфораторы ПД45-1 и ИП-45, контрольник К45-2, сортировка С45-1 и табуляторы Т-4М, Т-4МИ и Т-5.

В книге отмечается приоритет русских ученых и изобретателей в создании счетных машин и устройств. *С. И. Пантелеев*

3917 К. Обзор вводных и выводных устройств для вычислительных машин. Объединенная конференция Американского института инженеров-электриков, Института радиоинженеров и Ассоциации вычислительного машиностроения по счетным машинам (Review of input and output equipment used in computing systems. Joint AIEE-IRE-ACM computer conference. 142 pp., American Institute of Electrical Engineers, New York, March 1953, 4 doll.), Computers and Automation, 1953, **2**, № 5, 15 (библ.)

3918 РЕЦ. Описание вычислительной машины с магнитным барабаном (Description of a magnetic drum calculator (Annals of the Computation Laboratory of Harvard University, by the staff of the Computation Laboratory. Vol. 25), 320 pp., Harvard University Press, 8.00 doll.) [**Рецензия: Херш** (Hirsch C. J.), Electronics, 1953, **26**, № 7, 368, 370 (англ.)]

3919 РЕЦ. Кибернетика. Теория сигнала и информации (La cybernétique. Théorie du signal et de l'information. Réunions d'études et de mises au point tenues sous la présidence de Louis de Broglie, VI + 318 pp., fig., tab., Ed. de la Revue d'optique théorique et instrumentale, 1951, 24.50 fr.) [**Рецензия: Салис** (Salis v.), Bull. Schweiz. Elektrotechn. Vereins, 1953, **44**, № 16, 751—752 (нем.)]

3920 П. Электронное счетное устройство (Electronic computing circuits) [Minister of Supply, Австралия]. Австрал. пат. 150406, кл. 05.5, 19.03.53

Устройство для суммирования двух чисел, представленных двоичным кодом, в виде последовательностей импульсов. На два входа сумматора поступают последовательно, разряд за разрядом, оба числа. На выходе устройства получаются последовательно импульсы, дающие цифры двоичного кода суммы. Устройство выполнено на логических схемах «и», «или» и линиях задержки. Приведены две схемы.

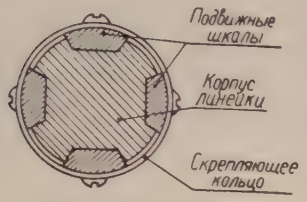
3921 П. Счетная линейка. Стибиц (Slide rule. Stibitz George R.) [Barber-Colman Co., Rockford, Ill.] Пат. США 2649247, кл. 235—70, 18.08.53

Движок счетной линейки смещается не только вдоль шкал корпуса, но и перпендикулярно к ним. Каждая логарифмическая шкала разбита на несколько параллельно расположенных частей.

В. М. Брадис

3922 П. Счетная линейка. Куиллинан (Slide rule. Quillinan Michael J.), Пат. США 2643823, кл. 235—79.5, 30.06.53

Счетная линейка в виде цилиндра (или призмы), в котором вдоль образующих выбраны пазы для помещения в них нескольких подвижных шкал. Неподвижные шкалы нанесены на поверхности цилиндра между подвижными. Все подвижные шкалы скреплены на концах двумя кольцами и перемещаются вместе. Визир выполнен в виде прозрачного кольца, надетого на цилиндр, и может перемещаться по нему вдоль образующих.



К реф. 3922 П

Примечание референта. Для пояснения конструкции приводится вид с торца линейки этого типа с 4 шкалами. *Д. Ю. Панов*

3923 П. Эллипсограф. Коте (Ellipsograph. Coats Jesse C.). Пат. США 2646623, кл. 33—31, 28.07.53

Конструкция эллипсографа, основанного на известном свойстве отрезка, концы которого движутся по двум взаимно перпендикулярным прямым (любая точка прямой, на которой лежит этот отрезок, описывает эллипс). Приведен общий вид прибора. *В. М. Брадис*

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

3924. Работа регулятора движения автомобильного транспорта в соответствии с интенсивностью движения. Герло (Operation of the «volume-density» vehicle-actuated traffic signal controller. Gerlough D. L.), Traffic Engng, 1953, **23**, № 10, 339—344 (англ.)

Приводится описание работы специального вычислительного устройства «регулятора движения автомобильного транспорта» в зависимости от интенсивности движения, т. е. количества автомобилей, проходящих перекресток за промежуток времени при зеленом сигнале, и продолжительности ожидания автомобилей у красного сигнала. Даются упрощенные схемы, поясняющие принцип действия регулятора.

Регулятор движения представляет собой вычислительное устройство непрерывного действия, изменяющее сигналы движения в зависимости от величины следующих переменных: 1) числа ожидающих автомобилей у красного сигнала; 2) продолжительности отрезка времени ожидания автомобиля, прибывшего первым к красному сигналу; 3) мгновенной интенсивности движения (числа автомобилей, которые пересекают перекресток за время зеленого сигнала). Автомобиль, движущийся к перекрестку, воздействует на чувствительное устройство, расположенное на некотором расстоянии от перекрестка. Чувствительное устройство в свою очередь воздействует на регулятор движения.

Время прохождения автомобилей при зеленом сигнале разделено на начальное время, являющееся постоянной величиной, несколько большей 10 сек., и дополнительное время, автоматически изменяющееся в зависимости от количества проходящих автомобилей и удлиняющее продолжительность действия зеленого сигнала. Величина максимального значения дополнительного времени может быть установлена в зависимости от интенсивности движения. По достижении максимального значения дополнительного времени зеленый сигнал меняется на красный.

Изменение сигналов чаще всего происходит не тогда, когда дополнительное время зеленого сигнала достигает максимального значения, а когда случится промежуток в группах автомобилей, проходящих через перекресток при зеленом сигнале, или достигло заданного максимума значение времени ожидания автомобиля, прибывшего первым к стоплинии перекрестка в момент появления красного сигнала. При этом учитывается и интенсивность движения автомобилей на стороне зеленого сигнала.

Упрощенные схемы отдельных узлов регулятора движения состоят из цепей с сопротивлениями и емкостями и тиратронов, приводящих в действие реле. На панель управления регулятора выведены 28 ручек регулировки с соответствующими шкалами. Установкой величин различных сопротивлений при помощи этих ручек задаются моменты зажигания тиратронов, определяющие начальные моменты выполнения каких-либо операций.

В. С. Бородин

3925. Автоматический полисмен-регулировщик. Бём (Robot traffic policemen. Boehm George A. W.), Computers and Automation, 1953, **2**, № 5, 7—10 (англ.)

Сообщается о применяемых в настоящее время в США приборах для автоматического управления сигналами движения на перекрестках.

Простые приборы управления сигналами движения состоят из устанавливаемого на некотором расстоянии от перекрестка чувствительного элемента (педального типа), воздействующего на вычислительное устройство простейшего типа, дающее электрические сигналы на светофор. Время действия зеленого света определяется количеством проходящих автомобилей, однако максимальное значение этого времени, например 20 сек., устанавливается заранее.

Более сложные приборы управления сигналами движения учитывают также интенсивность движения во времени, время ожидания и число автомобилей на стороне красного света. Кроме того, более сложные приборы устанавливаются на таких узловых местах движения, где имеется пересечение нескольких шоссе, улиц или переулков. В более сложных приборах могут быть использованы дру-

гие чувствительные элементы (например, фотоэлектрические) и, кроме того, они могут переключаться для работы на различную интенсивность движения.

Приводится схема управления сигналами движеения на сложном перекрестке и дается таблица этих сигналов для разных фаз движения.

См. реф. 3224. *В. С. Бородин*

3926. Вычислительный прибор, управляющий движением. Уотерс (Traffic signals thant think. Waters Charles R.), Traffic Engng, 1953, 23, № 11, 390, 392 (англ.)

Сообщается о разработанном фирмой «О'К оннел Электрик» (O' Connel Electric Co.) приборе управления, регулирующем автомобильное движение.

Основной частью прибора является главный блок, на который поступают сигналы с чувствительных устройств, установленных на некотором расстоянии от перекрестка. В зависимости от числа автомобилей, приходящих и отходящих в одном и в другом направлении на перекрестке, главный блок вырабатывает команды управления, используемые для зажигания красного или зеленого сигнала движения.

См. также реф. 3924, 3925.

В. С. Бородин

См. также: 3835, 3836, 3837, 3841

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Алексич 3660, 3661
Амицур 3876
Аржаных И. С. 3717
Ариньш Э. И. 3655 Д
Армстронг 3862
Аспейтия 3756

Б

Багчи 3742
Банг 3688
Барбилян 3635
Бартл 3734
Батырев А. В. 3674
Баум 3645
Беджарано 3837
Бек 3825
Белецкий 3579
Бенке 3566
Бергер 3669
Бергман 3697
Бергхёйс 3799 **РЕЦ**
Березанский Ю. М. 3698
Бертрам 3750 **РЕЦ**
Бём 3925
Било 3799 **РЕЦ**
Бланч 3832
Боас 3582 **РЕЦ**
Ботт 3642
Бранк 3666
Браудер 3701
Брехт 3847
Брёйн 3626, 3627
Буа 3914
Быков Я. В. 3733, 3735

В

Вакия 3723
Вальтер 3836
Ванс 3882
Вейвода 3562
Вейссенхофф 3795
Векуа И. Н. 3702
Вестпфаль 3718
Вёйтс 3745 **РЕЦ**
Виландт 3619
Вильсон 3775
Вильсон 3678
Войнич Т. Г. 3834
Войт С. С. 3722
Вон 3592 **РЕЦ**
Воронов Ф. И. 3730 Д
Врынчну 3788
Вычихло 3560
Вьеторис 3745 **РЕЦ**
Вьялар 3774

Г

Гаек 3561
Гампль 3749
Гарнер 3908
Гарса 3838
Гаучи 3620
Гейдельман Р. М. 3818
Герло 3924
Гефнер Дж. 3851 К
Гёртлер 3728 **РЕЦ**
Гилл С. 3915 К
Главка 3738 **РЕЦ**
Глук 3866
Годо 3809, 3815, 3816
Голдхабер 3634
Градуэлл 3865
Грей 3866
Грин 3850
Гротемейер 3828
Грунберг 3633
Гуд 3777
Гуделл 3867
Гудман 3768
Гюнтер 3729 **РЕЦ**

Д

Дебруннер 3801
Де-Джорджи 3652
Дейвид 3772
Дейвис 3680
Демидович Б. П. 3693
Дёч 3699
Джафаров А. С. 3670 Д
Джефри 3654 К
Диммер 3910
Дирдс 3861
Добреску 3629
Дрейзин 3633
Дьёдонне 3621
Дюран 3711
Дюссин 3883

Е

Евграфов М. А. 3673
Евдокимов И. С. 3916 К
Евстигнеев Г. П. 3916 К
Ефимов Н. В. 3830

З

Зелиг 3758 **РЕЦ**
Зёнген 3753

И

Ивата 3715
Илиев 3672, 3676
Илиев Л. 3672, 3676
Ито 3624

Й

Йейтс 3700 **РЕЦ**
Йонкер 3912

К

Каве 3784, 3785
Кайзер 3907
Канольд 3611, 3612
Карлиц 3614
Кахан 3737
Кац 3779
Каш 3600
Келлер 3852
Кендалл 3606
Керс 3858
Кёйперс 3601
Кёхер 3598
Кивелёвич 3774
Кимбалл 3776
Кимпара 3817
Киносита 3640
Кип 3863
Клайн 3778
Клоттер 3712
Кнёдель 3597
Кожин Г. 3763
Колесников А. Г. 3724
Коллар 3783
Колобов П. Г. 3806
Конте 3790
Коробов Н. М. 3604
Корфилд 3909
Котелянский Д. М. 3599
Котс 3923 П
Коутский 3786
Кохендёрфер 3631
Крейн С. Г. 3636
Крейсел 3591
Кретнер 3804
Криушин В. Н. 3916 К
Куиллинан 3922 П
Кунц 3738
Куратовский 3567
Куффиньяль 3842

Л

Лаврентьев М. М. 3839
Ладыженская О. А. 3831
Ламсон 3820
Ланс 3833
Ланюк А. В. 3807
Латышева К. Я. 3691
Лау 3585
Ле-Век 3602
Леви 3767
Лезицкий 3632
Леземан 3836
Лелон 3684
Лензе 3728 **РЕЦ**
Ленувель 3842
Лески 3706
Лёб 3589
Лёвнер 3703
Лёш 3750 **РЕЦ**
Либер А. Е. 3630
Линник Ю. В. 3608
Лиондес 3866
Лисерре 3787
Литлвуд 3618
Литлвуд 3745 **РЕЦ**
Лоренц 3595
Лузин Н. Н. 3659 К, 3689 **РЕЦ**
Ляпунов А. А. 3656, 3689 **РЕЦ**

М

Ма 3761
Майард 3841
Мак-Калли 3710
Мак-Канн 3881
Мак-Клинток 3778
Мак-Нерни 3760
Малышев А. В. 3608
Мани 3876
Манн 3744

Мараваль-Касесновес 3821
Марджанишвили К. К. 3593
Маржик 3562
Марчевский 3650
Масуда 3721
Маурин 3759
Менели 3877
Мерман Г. А. 3713
Мерфи 3846
Мёленбелд 3601
Микусинский 3709, 3754
Минагава 3829
Михаил 3671
Моисеев Н. Н. 3696
Мойс 3641
Морделл 3605, 3609
Моррилл 3877
Москвичев А. Д. 3707
Мукхерджи 3742
Мюллер 3718

Н

Нечаев В. И. 3594
Нёйман 3623
Нибон 3592 **РЕЦ**
Никитин А. К. 3690, 3695
Ниренберг 3708
Ниче 3705

О

Обрешков 3757
Обрешков Н. 3757
Овербек 3912
Оппенгейм 3876
Оцука 3682

П

Пароди 3736 **РЕЦ**
Пароди 3848
Пауэлл 3779
Пейн 3894
Перес-Качо 3615
Перри 3833
Пинни 3712
Пирсон 3725
Пойа 3745 **РЕЦ**
Потягайло Д. Б. 3681
Прахар 3700 **РЕЦ**
Привалов И. И. 3798 **К**
Проуза 3786
Пуэнсело 3720

Р

Раделът 3849
Радо 3829
Райдаут 3667
Райдер 3773
Ранкин 3606
Рао 3780 **РЕЦ**
Расёва 3588
Рашевский П. К. 3826 **К**
Редеи 3610
Реньи 3565, 3577
Решетняк Ю. Г. 3827
Рид 3769
Ридвиль 3801
Рингель 3643
Риос 3765, 3766
Рисс 3649
Рихтер 3764
Ричмонд 3747 **РЕЦ**
Роденхёйс 3912
Роджерс 3741
Розенблатт 3837
Розентал 3739
Романовский В. И. 3770
Росенлев 3847
Рубинов 3866
Рубо-Валетт 3736 **РЕЦ**
Рыбаков В. Н. 3814
Рыжова В. А. 3808 **Д**
Рылл-Нардзевский 3650, 3762
Рюти 3843

С

Саватье 3845
Саган 3758 **РЕЦ**
Сайкс 3732
Сакаи 3638
Салис 3919 **РЕЦ**
Салфранк 3644
Самко Г. П. 3613
Саморуков Б. Н. 3805, 3813
Сас 3748
Сатов 3844
Сатхе 3596
Сегё 3704
Сенгупта 3716
Серпинский 3657
Сибата 3823
Сингх 3679
Синьорини 3802
Ситгривс 3780 **РЕЦ**
Сканлон 3897
Скотт 3625
Слепенчук К. М. 3683
Смирнов В. И. 3687
Солзер 3854
Солцер 3857
Сопер 3860
Спараторе 3803
Стансел 3898
Стибиц 3921 **П**
Сюс 3603

Т

Такено 3822
Таргонский 3743
Тиксон 3853
Тиман М. Ф. 3664
Тисдейл 3752
Титт 3710
Томас 3878
Трусделл 3794
Тулмин 3637
Туран 3662
Тюринг 3864

У

Уайлдер 3592 **РЕЦ**
Уамсли 3665
Уилер Д. 3915 **К**
Уилкс М. 3915 **К**
Уилтс 3881
Уишарт 3856 **РЕЦ**
Уолл 3740
Уотерс 3926
Уэгстейн 3835
Уэртинг А. 3851 **К**

Ф

Фейделл 3648
Фенуик 3852
Фергусон 3859
Фордер 3793
Форсайт 3840
Франкль Ф. И. 3824
Функ 3758 **РЕЦ**

Х

Хадвигер 3714
Хайош 3563
Халилов 3726
Халмош П. 3653 **К**
Хаммерсли 3781
Хампе 3751 **РЕЦ**
Хампль 3569
Хантьес 3729 **РЕЦ**
Харди 3745 **РЕЦ**
Хартман 3762
Хас 3882
Хаусхолдер 3581
Хейнс 3570
Хейнсуэрт 3617
Хенкин 3590
Херт 3747 **РЕЦ**
Херш 3677
Херш 3918 **РЕЦ**
Хинтон 3861
Хинчин А. Я. 3771
Хирон 3731
Хонеггер 3746 **РЕЦ**
Ху Сы-цзэнь 3646
Хуа Ло-гэн 3685, 3686
Хукухара 3692
Хункоса 3668

Ц

Цвейлинг 3751 **РЕЦ**
Цыганков И. В. 3811, 3812
Цыпкин Я. З. 3727 **К**

Ч

Чакрабарти 3755
Чарин В. С. 3622
Чеккони 3651
Чжан Хань 3667
Чжэнь Шэн-шэнь 3647

Ш

Шанталь 3782
Шапиро 3663
Шаплон 3583
Шарп 3639
Швердтфегер 3616
Шеррер 3819
Шефке 3694
Шиманский 3578
Шлефли 3810 **К**
Шмидт 3658
Шоблик 3750 **РЕЦ**
Шрейдер 3796
Штальман 3675
Шубников А. В. 3800
Шугайлин 3797
Шугайлін О. В. 3797
Шумейкер 3906

Э

Эгервари 3564
Эглстон 3791
Эмерслебен 3719
Эрдёш 3607
Эрхарт 3792
Эфезер 3675

Ю

Юидобро 3789

Я

Ямабе 3628
Янг 3668

A

Alexits G. 3660, 3661
Amitsur Sh. 3876
Armstrong H. L. 3862
Azpeitia A. G. 3756

B

Bagchi H. Das 3742
Bang Th. 3688
Barbilian D. 3635
Bartle R. G. 3734
Baum W. 3645
Beck F. 3825
Behnke 3566
Bejarano G. G. 3837
Berger E. R. 3669
Berghuys S. J. 3799 **РЕЦ**
Bergmann H. G. 3697
Bertram G. 3750 **РЕЦ**
Bielecki A. 3579
Bilo J. 3799 **РЕЦ**
Blanch G. 3832
Boas R. P., Jr. 3582 **РЕЦ**
Boehm G. A. W. 3925
Boie W. 3914
Bott R. 3642
Brecht W. 3847
Browder F. E. 3701
Bruijn N. G. de 3626, 3627
Brunk H. D. 3666

C

Carlitz L. 3614
Cavé R. 3784, 3785

Cecconi J. 3651
Chakrabarty N. K. 3755
Chang Han 3667
Chantal R. 3782
Chapelon J. 3583
Chern Shiing-Shen 3647
Coats J. C. 3923 II
Conte L. 3790
Corfield G. 3909
Couffignal L. 3842

D

David F. N. 3772
Davis Ph. 3680
De Giorgi E. 3652
Deards S. R. 3861
Debrunner H. 3801
Dieudonné J. 3621
Dimmer R. P. 3910
Dobrescu A. 3629
Doetsch G. 3699
Drazin M. P. 3633
Durand È. 3711
Dussine R. 3883

E

Egerváry J. 3564
Eggleston H. G. 3791
Ehrhart E. 3792
Emersleben O. 3719
Epheser H. 3675
Erdös P. 3607

F

Fadell E. R. 3648
Fenwick M. 3852
Ferguson A. E. 3859
Forder H. G. 3793
Forsythe G. E. 3840
Funk P. 3758 **РЕЦ**

G

Garner L. E. 3908
Garza A. de la 3838
Gautschi W. 3620
Gerlough D. L. 3924
Gluck S. E. 3866
Godeaux L. 3809, 3815, 3816
Goldhaber J. K. 3634
Good I. J. 3777
Goodell J. D. 3867
Goodman Leo A. 3768
Görtler H. 3728 **РЕЦ**
Gradwell C. F. 3865
Gray H. J., Jr. 3866
Green H. E. 3850
Grotemeyer K.-P. 3828
Gruenberg K. W. 3633
Günther P. 3729 **РЕЦ**

H

Haantjes J. 3729 **РЕЦ**
Haas D. L. 3882
Hadwiger H. 3714
Hájek J. 3561
Hajós G. 3563
Halilov Z. G. 3726
Hammersley J. M. 3781
Hampe E. 3751 **РЕЦ**
Hampel R. 3569
Hampl M. 3749
Hardy G. H. 3745 **РЕЦ**
Hartman S. 3762
Haynes N. A. 3570
Haynsworth E. V. 3617
Hearon J. Z. 3731
Henkin L. 3590
Hersch J. 3677
Hinton W. R. 3861
Hirsch C. J. 3918 **РЕЦ**
Hlawka E. 3758 **РЕЦ**
Honegger W. 3746 **РЕЦ**
Householder A. S. 3581
Hu Sze-Tsen 3646
Huidobro J. M. 3789
Hukuhara 3692
Hurt J. M. 3747 **РЕЦ**

I

Itô N. 3624
Iwata G. 3715

J

Jeffery R. L. 3654 **К**
Jonker J. L. H. 3912
Juncosa M. L. 3668

K

Kahan Th. 3737
Kaiser B. 3907
Kanold H.-J. 3611, 3612
Kasch F. 3600
Katz L. 3779
Keller G. 3852
Kendall D. G. 3606
Kimball B. F. 3776
Kimpara M. 3817
Kinoshita Sh. 3640
Kitz N. 3863
Kiveliovitch M. 3774
Kline S. J. 3778
Klotter K. 3712
Kneebone G. T. 3592 **РЕЦ**
Knödel W. 3597
Kochendörffer R. 3631
Koecher M. 3598
Kollár K. 3783
Koutsky Z. 3786
Kreisel G. 3591
Krettner J. 3804
Kuipers L. 3601
Kunz B. 3738
Kuratowski K. 3567
Kurss H. 3858

L

Lamson K. W. 3820
Lance G. N. 3833
Lau E. 3585
Lelong P. 3684
Lenouvel M.-A. 3842
Lense J. 3728 **РЕЦ**
Leondes C. T. 3866
Lesemann K.- J. 3836
Lesky P. 3706
LeVeque W. J. 3602
Levitzki J. 3632
Lévy P. 3767
Liserre G. O. G. 3787
Littlewood D. E. 3618
Littlewood J. E. 3745 **РЕЦ**
Loewner Ch. 3703
Lorentz G. G. 3595
Löb M. H. 3589
Lösch F. 3550 **РЕЦ**

M

Ma S. T. 3761
McCann G. D. 3881
McClintock F. A. 3778
McCulley W. S. 3710
MacNerney J. S. 3760
Mann P. A. 3744
Many A. 3876
Maravall Casesnoves D. 3821
Marczewski E. 3650
Mařík J. 3562
Masuda H. 3721
Maurin K. 3759
Meneley C. A. 3877
Meulenbeld B. 3601
Mikhail M. N. 3671
Mikusiński J. G. 3709, 3754
Minagawa T. 3829
Moise E. E. 3641
Mordell L. J. 3605, 3609
Morrill C. D. 3877
Mukherji B. N. 3742
Murphy L. J. 3846
Müller R. 3718
Myard F. 3841

N

Neumann B. H. 3623
Nirenberg L. 3708
Nitsche J. 3705

O

Ohtsuka 3682
Oppenheim U. 3876
Overbeek A. J., W. M. van 3912

P

Paine R. C. 3894
Parodi A. 3848
Parodi M. 3736 **РЕЦ**
Pearson J. D. 3725
Pérez-Cacho L. 3615
Perry R. L. 3833
Pinney E. 3712
Poincelot P. 3720
Polya G. 3745 **РЕЦ**
Powell J. H. 3779
Prachar K. 3700 **РЕЦ**
Prouza L. 3786

Q

Quillinan M. J. 3922 II

R

Radelt H. 3849
Rado T. 3829
Rankin R. A. 3606
Rao C. R. 3780 **РЕЦ**
Rasiowa H. 3588
Rédei L. 3610
Reid A. T. 3769
Rényi A. 3565, 3577
Richmond D. E. 3747 **РЕЦ**
Richter H. 3764
Rideout V. C. 3667
Rider P. R. 3773
Riedwil H. 3801
Riesz M. 3649
Ringel G. 3643
Ríos S. 3765, 3766
Rodenhuis K. 3912
Rogers C. A. 3741
Rosenblatt B. R. 3837
Rosenlew N. 3847
Rosenthal A. 3739
Rouband-Valette J. 3736 **РЕЦ**
Rubinoff M. 3866
Ryll-Nardzewski C. 3650, 3762
Ryti H. 3843

S

Saalfrank C. W. 3644
Sagan H. 3758 **РЕЦ**
Sakai Sh. 3638
Salis v. 3919 **РЕЦ**
Saltzer Ch. 3857
Salzer H. E. 3854
Sathe L. G. 3596
Satow H. 3844
Savatier J. 3845
Scanlon J. J. 3897
Schäfke L. W. 3694
Scherrer W. 3819
Schläfli L. 3810 **К**
Schmidt J. 3658
Schoblik L. 3750 **РЕЦ**
Schwerdtfeger H. 3616
Scott L. L. 3625
Selig F. 3758 **РЕЦ**
Sengupta H. M. 3716
Shapiro V. L. 3663
Sharp H., Jr. 3639
Shibata T. 3823
Shoemaker H. F. 3906
Shrader D. F. 3796
Sierpiński W. 3657
Signorini A. 3802
Singh S. K. 3679
Sitgreaves R. 3780 **РЕЦ**
Soper P. F. 3860
Söhngen H. 3753
Sparatore E. 3803
Stallmann 3675
Stansel F. R. 3898
Stibitz G. R. 3921 II
Sykes J. B. 3732
Szász O. 3748
Szegë G. 3704

Szüsz P. 3603
Szymański P. 3578

T

Takeno H. 3822
Targonszky G. 3743
Teasdale R. D. 3752
Thomas P. A. V. 3878
Thüring B. 3864
Tikson M. 3853
Titt E. W. 3710
Toulmin G. H. 3637
Truesdell C. 3794
Turan P. 3662

V

Vance P. R. 3882
Vaughan H. E. 3592 **РЕЦ**
Vejvoda O. 3562
Vialar J. 3774
Vietoris L. 3746 **РЕЦ**
Vrânceanu G. 3788
Vyčichlo F. 3560

W

Wakiya Sh. 3723
Wall H. S. 3740
Walmsley Ch. 3665
Walther A. 3836
Waters Ch. R. 3926
Wegstein J. H. 3835
Westpfahl K. 3718
Weyssenhoff J. 3795
Wielandt H. 3619
Widler R. L. 3592 **РЕЦ**
Wilson E. B. 3775
Wilson R. 3678
Wilts C. H. 3881
Wishart J. 3856 **РЕЦ**
Wuyts P. 3745 **РЕЦ**

Y

Yamabe. H. 3628
Yates R. C. 3700 **РЕЦ**
Young D. M. 3668

Z

Zweiling K. 3751 **РЕЦ**

ПОПРАВКИ

К реф. 1282

В строке 14 напечатано βydt, следует читать $\beta xydt$.

К реф. 1653

Пункт 2 должен быть заменен следующим: Если $\lambda \in S(Di)$, то система (I) будет полной, когда к ней добавим нормальные производные полной системы собственных функций, соответствующих собственному значению λ. *И. Н. Векуа*

К реф. 2095

Основной результат статьи Андерсона был получен А. Ф. Бермантом в 1947 г. как частный случай одной более общей теоремы (Матем. сб., 1947, 20 (62), № 1, 72). *Г. В. Коренкий*

К реф. 3179 РЕЦ.

Напечатано Кардено, следует читать Кардано.

К реф. 3518

На стр. 91, в левом столбце, строки 16—19 снизу

напечатано	следует читать:
1101	1101
110(1)	110(1)
1011	1011

Технический редактор *К. И. Игнаткова*